MATEMÁTICA

6.ª CLASSE

Texto Editores

Ficha Técnica

Título
Matemática | Manual da 6.ª classe

Redacção de Conteúdos
Isabel Ferreira do Nascimento
Wandanda Mbanza João
Armando José Nzinga
Bernardo Filipe Matias
Edson Magalhães
Eduardo Nangacovie
Isabel Pedro
José Caluina Pedro
José da Silva
Moisés Figueira
Paulina Suquina
Vanda Rufino

Capa
Ministério da Educação – MED

Coordenação Técnica para a Actualização e a Correcção
Ministério da Educação – MED

Revisão de Conteúdos e Linguística
Paula Henriques - Coordenadora
Catele Conceição Teresa Jeremias
Domingos Cordeiro António
Gabriel Albino Paulo
Garcia Muzinga Massala Francisco
Manuel Pierre
Silvestre Osvaldo de Margarida Estrela
Tunga Samuel Tomás

Editora
Texto Editores, Lda.

Pré-impressão, Impressão e Acabamento
Texto Editores, Lda. / DAMER Gráfica SA

Ano / Edição / Tiragem
2021 / 2.ª Edição / 850 372 Exemplares

ISBN
978-989-8884-85-5

Endereço electrónico do Editor
info@textoeditores.ao

Apresentação

Querido(a) aluno(a),

As lições seleccionadas para esta classe visam conduzir-te ao nível do progresso e do desenvolvimento, num mundo em constante mudança, através de conteúdos e de exercícios diversificados para a consolidação de algumas matérias, assim como o conhecimento de outras.

Deste modo, irás estudar, neste manual escolar de Matemática da 6.ª classe, matérias sobre números e operações, equações, inequações e proporcionalidade, bem como estatística e geometria.

Esperamos que as lições a serem estudadas te ajudem a ampliar os conhecimentos, a desenvolver habilidades e a compreender as realidades actuais do nosso país, do nosso continente e do mundo, pois será desta forma que crescerás social e intelectualmente.

O Ministério da Educação

Índice

Tema 1 • Números e operações

Tema 2 • Equações e inequações Proporcionalidade

Tema 3 • Estatística

Tema 4 • Geometria

Tema 1

Números e operações

1.1 Multiplicação de números naturais e de números racionais absolutos

Introdução

Os números estão agrupados em conjuntos numéricos, que é importante conhecer para melhor entender as operações e os seus procedimentos.

Nas classes anteriores, estudámos as operações com números que pertencem a três conjuntos numéricos: o conjunto dos números naturais (**N**), o conjunto dos números naturais incluindo o zero (**N_0**) e o conjunto dos números racionais absolutos (**Q_+**). Os números que pertencem a cada um dos conjuntos são:

- Conjunto dos números naturais: **N** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}
- Conjunto dos números naturais incluindo o zero: **N_0** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
- Conjunto dos números racionais absolutos (**Q_+**): é formado por todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), onde **a** é um número qualquer do conjunto **N_0** e **b** um número qualquer do conjunto **N**.

Neste tema, iremos estudar as operações de multiplicação, divisão, adição e subtracção que se podem fazer nestes conjuntos.

Chamamos multiplicação à operação do tipo **a** × **b** = **c**, onde **a** e **b** chamam-se **factores** e **c produto**.

> **O zero (0) é o elemento absorvente da multiplicação.** Portanto, qualquer número **a**, seja **a** um número natural ou racional absoluto, multiplicado por zero (0) tem como produto o número zero (0). Ou seja: **$a \times 0 = 0 \times a = 0$**

Exemplo:

a) $418 \times 0 = 0$ **b)** $0 \times 6{,}75 = 0$

> **O número um (1) é o elemento neutro da multiplicação.** Portanto, qualquer número **a**, seja **a** um número natural ou racional absoluto, multiplicado por um (1) tem como produto o mesmo número a.
> Ou seja: **$a \times 1 = 1 \times a = a$**

Exemplo:

a) $23 \times 1 = 23$ **b)** $1 \times 45{,}6 = 45{,}6$.

Multiplicação de números naturais por números decimais

Observa, agora, a conversa entre dois amigos.

Podes calcular esta multiplicação (4 × 1,2) de, pelo menos, três formas diferentes:

a) Somar o segundo factor, o números de vezes indicado:

$1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 = 4{,}8$

b) Aplicar a propriedade distributiva e calcular mentalmente:

$(4 \times 1) + (4 \times 0{,}2) =$

$= 4 + 0{,}8 =$

$= 4{,}8$

c) Utilizar o **algoritmo** da multiplicação, ou seja, o processo de cálculo, também designado por "operação armada".

$$\begin{array}{r} 1{,}\ 2 \\ \times \quad 4 \\ \hline 4{,}\ 8 \end{array}$$

Na multiplicação de um número natural por um número decimal, multiplicam-se os números como se fossem naturais (ignorando a vírgula do número decimal). Ao produto, atribui-se um número de casas decimais igual ao número de casas decimais do número decimal.

Exercícios

1. Calcula mentalmente, recorrendo à propriedade distributiva, os seguintes produtos.

a) 3 × 3,1 **b)** 4 × 2,2 **c)** 2 × 2,3

2. Calcula, recorrendo ao algoritmo da multiplicação.

a) 23 × 0,6 **b)** 498 × 1,7 **c)** 875 × 3,56

Exemplo:

1. A Dona Ana quer fazer uma surpresa às suas duas irmãs. Ela viu, numa loja, um tecido bonito e quer comprá-lo para fazer duas saias e oferecer às suas irmãs.

Quantos metros de tecido terá de comprar a Dona Ana para fazer duas saias, se cada saia precisar de 1,52 m?

Solução:

Para sabermos quantos metros de tecido a Dona Ana terá de comprar para fazer duas saias, sabendo que cada saia precisa de 1,52 m de tecido, teremos que multiplicar 1,52 m por 2.

1,52 m × 2 = ? .

$$\begin{array}{r} 1,\ 5\ 2 \\ \times \quad\ \ 2 \\ \hline 3,\ 0\ 4 \end{array} \qquad \cancel{1}$$

Então: 1,52 m × 2 = 3,04 m

R: A Dona Ana terá de comprar 3,04 m de tecido para fazer as duas saias.

Calcula:

a) 6 × 2,4 =

b) 2,8 × 13 =

c) 19 × 0,5 =

d) 0,153 × 23 =

Solução:

- Para a alínea **a)**, sabendo que a multiplicação é comutativa, teremos: 6 × 2,4 = 2,4 × 6 = ?

$$\begin{array}{r} 2,\ 4 \\ \times \quad 6 \\ \hline 1\ 4,\ 4 \end{array} \qquad \cancel{2}$$

Então: 6 × 2,4 = 14,4

- Para a alínea **b)** 2,8 × 13 = ? teremos:

$$\begin{array}{r} 2,\ 8 \\ \times\ 1\ 3 \\ \hline 8\ 4 \\ +\ 2\ 8\ \ \ \\ \hline 3\ 6,\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \\ \cancel{1} \end{array}$$

Então: 2,8 × 13 = 36,4

- Para a alínea **c)** 19 × 0,5 = ? teremos:

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 0,5 \\ \hline 95 \\ +\ 00 \\ \hline 09,5 \end{array} \qquad \cancel{4}$$

Então: 19 × 0,5 = 9,5

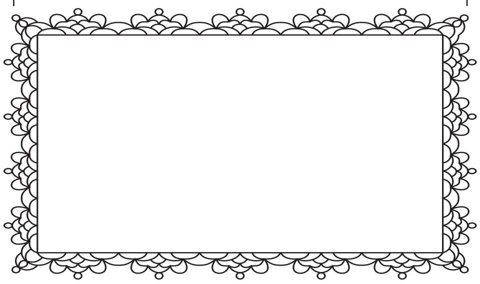
- Para a alínea **d)** 0,153 × 23 =? teremos:

$$\begin{array}{r} 0,153 \\ \times\ 23 \\ \hline 0459 \\ +\ 0306 \\ \hline 03,519 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{1} \\ \cancel{1} \\ \cancel{1} \end{array}$$

Então: 0,153 × 23 =3,519

Exercícios

1. A Dona Maria colocou uma renda à volta de uma toalha rectangular com 3 m de comprimento e 1,52 m de largura. Quanto dinheiro gastou a Dona Maria, se cada metro de renda custou Kz 4200,00?



2. Calcula a área de um terreno rectangular, em hm^2, que tem 152 m de comprimento e 600 m de largura.

3. O João recebeu um estojo de lápis de cor novo. Cada lápis tem 11,3 cm de comprimento e o estojo tem 12 lápis. Qual o comprimento total dos 12 lápis?

4. Resolve:

a) 4,5 × 6 =

b) 97 × 0,23 =

c) 0,821 × 54 =

d) 642 × 1,479

e) 312 × 0,23 =

f) 7,236 × 938 =

5. Completa, no teu caderno, a tabela com os produtos das multiplicações.

×	2,394	12,34	147,2
2			
3			
4			
7			

Multiplicação de números decimais por 10; 100; 1000; ...

Num número natural ou decimal, o número zero pode assumir posições neutras, ou seja, posições que não alteram o valor significativo do número, como vemos a seguir.

1. O número zero, posicionado à esquerda de um número natural ou decimal, não antecedido por um outro número, diferente de zero, nem sucedido por uma vírgula, não tem valor significativo.

   Exemplos:

   a) 034 = ~~0~~34= 34;

   b) 00230 = ~~00~~230 = 230;

   c) 00076,054 = ~~000~~76,054 = 76,054;

   d) 0000,098 = ~~0000~~,098 = 0,098.

2. Num número decimal, o zero posicionado à direita, depois de uma vírgula e não sucedido por um outro número, diferente de zero, também não tem valor significativo.

   Exemplos:

   a) 4,02300 = 4,023~~00~~ = 4,023;

   b) 87,1000 = 87,1~~000~~ = 87,1;

   c) 123, 000 = 123,~~000~~ = 123;

   d) 0,007000 = 0,007~~000~~ = 0,007.

Na multiplicação de um número decimal por 10, 100, 1000, etc., o produto é igual ao número decimal com a vírgula deslocada para a direita, tantas casas decimais quanto o número de zeros dos números 10, 100, 1000, etc.

Exemplo:

$3{,}81 \times 10 = ?$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 3, & 8 & 1 \\
\times & & & 1 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 \\
+ & 3 & 8 & 1 & \\
\hline
 & 3 & 8, & 1 & 0
\end{array}$$

Então: $3{,}81 \times 10 = 38{,}1$

Analogamente, podemos dar respostas a operações semelhantes, manipulando apenas o número de casas decimais do número decimal. Vejamos:

a) $45{,}123 \times 10 = 451{,}23$

Repara que o número 10 tem um zero; então a vírgula desloca-se uma casa para a direita.

b) $23{,}367 \times 100 = 2336{,}7$

O número 100 tem dois zeros; então a vírgula desloca-se duas casas para a direita.

c) 1,4567 × 1000 = 1456,7

O número 1000 tem três zeros; então a vírgula desloca-se três casas para a direita.

d) 12, 654 × 1000 = 12 654

O número 1000 tem três zeros; então a vírgula desloca-se três casas para a direita. Nota que não há necessidade de colocar a vírgula, porque ela desloca-se para a última casa decimal.

E se o número de casa decimais for inferior ao número de zeros? Neste caso igualamos o número de casas decimais ao número de zeros, adicionando zeros à direita do número decimal.

Exemplos:

a) 1,91 × 1000 = 1,910 × 1000 = 1910;

b) 0,2 × 10000 = 0,2000 × 10000 = $\cancel{0}2000$ =2000;

c) 0,07 × 1000 = 0,070 × 1000 = $\cancel{00}70$ = 70.

Exercícios

Calcula:

a) 237,10 × 10 =

b) 32,129 × 100 =

c) 8,123450 × 1000 =

d) 32,129 × 100 =

e) 123,3 × 1000 =

f) 0,7 × 10000 =

g) 0,45 × 1000 =

h) 1,003 × 100 =

i) 0,0009 × 100 =

Multiplicação de números naturais por 0,1; 0,01; 0,001; …

Observa, com atenção, a multiplicação do número natural 2354 por 0,1; 0,01 e 0,001 e analisa os resultados.

1. 2354 × 0,1 = ?

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & 2 & 3 & 5 & 4 \\
\times & & & & 0, & 1 \\
\hline
 & & 2 & 3 & 5 & 4 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 0 & 2 & 3 & 5, & 4
\end{array}
$$

Então: 2354 × 0,1 = 235,4

2. $2354 \times 0{,}01 = ?$

$$\begin{array}{r}
2354 \\
\times \qquad 0{,}01 \\
\hline
2354 \\
0000 \\
+\ 0000 \\
\hline
0023{,}54
\end{array}$$

Então: $2354 \times 0{,}01 = 23{,}54$

3. $2354 \times 0{,}001 = ?$

$$\begin{array}{r}
2354 \\
\times \qquad 0{,}001 \\
\hline
2354 \\
0000 \\
0000 \\
+\ 0000 \\
\hline
0002{,}354
\end{array}$$

Então: $2354 \times 0{,}001 = 2{,}354$

Ao analisar os resultados das operações acima, observamos que a multiplicação do número 2354 por 0,1; 0,01; 0,001 resulta nos números 235,4; 23,54; 2,354, respectivamente.

Portanto, nota-se que o produto é igual à transformação do número 2354 em número decimal, sendo que o número de casas decimais varia em função dos números 0,1; 0,01; 0,001. Assim, podemos dizer que:

> A multiplicação de um número natural por 0,1; 0,01; 0,001; ... tem como produto um número decimal, que pode ser obtido atribuindo ao número natural um número de casas decimais igual ao número de casas decimais dos números 0,1; 0,01; 0,001; ....
>
> A atribuição das casas decimais é feita da **direita para a esquerda**.

Exemplos:

a) $234 \times 0{,}1 = 23{,}4$; o número 0,1 tem uma casa decimal, logo, o produto terá, também, uma casa decimal;

b) $983 \times 0{,}01 = 9{,}83$; o número 0,01 tem duas casa decimais, logo, o produto terá, também, duas casas decimais;

c) $2 \times 0{,}001 = 0002 \times 0{,}001 = 0{,}002$; para se fazer uma fácil transformação do número natural em decimal, o número de algarismos do número natural deve ser maior ou igual ao número de algarismos dos números 0,1; 0,01; 0,001, etc. O valor do número é alcançado ao adicionar zeros à esquerda do número natural;

d) $8700 \times 0{,}0001 = 08700 \times 0{,}0001 = 0{,}8700 = 0{,}87$;

e) $234 \times 0{,}001 = 0234 \times 0{,}001 = 0{,}234$;

f) $5 \times 0{,}0001 = 00005 \times 0{,}0001 = 0{,}0005$.

Exercícios

Calcula:

a) $231 \times 0{,}1 =$

b) $32129 \times 0{,}001 =$

c) $978123450 \times 0{,}000001 =$

d) $32000 \times 0{,}01 =$

e) $1233 \times 0{,}0001 =$

f) $7 \times 0{,}0001 =$

g) $45 \times 0{,}001 =$

h) $1 \times 0{,}01 =$

i) $9 \times 0{,}001 =$

Multiplicação de números racionais absolutos

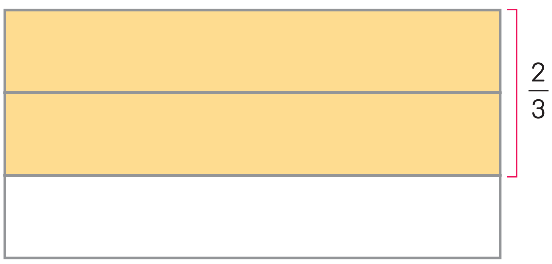
Exemplo:

A Cecília cultivou $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{6}$ da área do seu quintal. Qual é a área total cultivada pela Cecília?

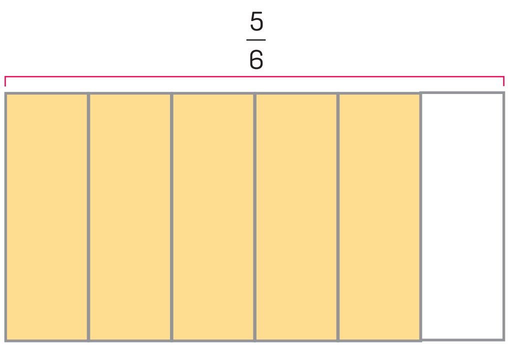
Para responder a essa pergunta, precisamos de calcular $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{6}$, ou seja, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$

Solução:

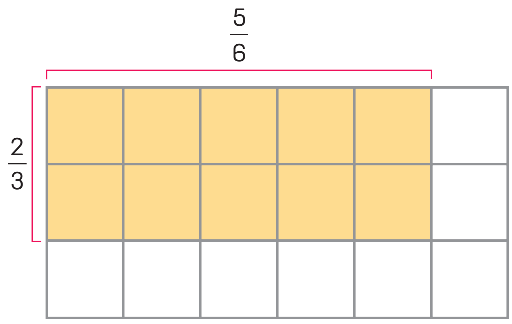
Vamos representar $\frac{2}{3}$ da área total do quintal da Cecília:



Agora, vamos representar $\frac{5}{6}$ da área total do quintal da Cecília:



Ao sobrepor as duas áreas, o que obtemos?



Obtemos um rectângulo dividido em 18 partes iguais.

Agora, quantas partes ocupa a plantação da Cecília? São 10 partes de 18, ou seja, $\frac{10}{18}$.

Assim: $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{10}{18}$.

A multiplicação de duas fracções tem como produto uma fracção cujo numerador surge da multiplicação dos numeradores dos factores e o denominador surge da multiplicação dos denominadores dos factores. Ou seja:

Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{d}{c}$, $(b \neq 0;\ c \neq 0)$, duas fracções, teremos $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Exemplos:

a) $\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$

b) $\frac{7}{9} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{9 \times 2} = \frac{35}{18}$

Como efectuar a multiplicação de **dois números decimais**?

O produto de dois números decimais é um número decimal, e é obtido multiplicando os números decimais como se fossem números naturais (ignorando as vírgulas). O número de casas decimais do produto é igual à soma do número de casas decimais dos factores.

Exemplo:

a) $3{,}5 \times 8{,}3 = ?$

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \times \quad 8{,}3 \\ \hline 105 \\ +\ 280 \\ \hline 29{,}05 \end{array}$$

Então: $3{,}5 \times 8{,}3 = 29{,}05$

E como proceder no caso da multiplicação de um **número decimal por uma fracção**?

Os números decimais e as fracções constituem o conjunto dos números racionais absolutos. Lembra-te de que os números decimais (dízimas) podem ser escritos em forma de fracção decimal. Observa os exemplos seguintes:

a) $3{,}56 = \frac{356}{100}$ **b)** $9{,}7 = \frac{97}{10}$ **c)** $0{,}48 = \frac{48}{100}$

O produto de uma fracção por um número decimal é obtido transformando o número decimal em fracção decimal e, posteriormente, multiplicam-se as duas fracções segundo a regra de multiplicação de fracções (numerador com numerador e denominador com denominador).

Exemplos:

a) $\frac{2}{3} \times 2{,}1 = \frac{2}{3} \times \frac{21}{10} = 2 \times \frac{2 \times 21}{3 \times 10} = \frac{42}{30}$

b) $5{,}13 \times \frac{2}{5} = \frac{513}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{513 \times 2}{100 \times 5} = \frac{1026}{500}$

Multiplicação de números naturais e fracções

Sabemos que qualquer número natural dividido por 1 é igual ao mesmo número, ou seja:

$\frac{23}{1} = 23$ $\frac{5}{1} = 5$ $\frac{2}{1} = 2$ $\frac{375}{1} = 375$

Podemos afirmar que **qualquer número natural é uma fracção de denominador 1**, o que quer dizer que **qualquer número natural é um número racional absoluto**. Vê os seguintes exemplos:

$2 = \frac{2}{1}$ $5 = \frac{5}{1}$ $23 = \frac{23}{1}$ $375 = \frac{375}{1}$

Consequentemente, **o produto de um número natural por uma fracção é obtido** ao transformar o número natural em fracção; posteriormente, multiplicam-se as fracções, segundo a regra de multiplicação de fracções (numerador com numerador e denominador com denominador).

Observa os exemplos seguintes:

a) $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{4}{3} \times 7 = \frac{4}{3} \times \frac{7}{1} = \frac{4 \times 7}{3 \times 1} = \frac{28}{3}$

A multiplicação de um número natural por uma fracção pode ser calculada multiplicando o número natural pelo numerador da fracção, mantendo o denominador.

Exemplos:

a) $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{4}{3} \times 7 = \frac{4 \times 7}{3} = \frac{28}{3}$

Exercícios

1. Calcula as operações seguintes:

a) $\frac{3}{2} \times 9 =$

b) $91 \times \frac{50}{17} =$

c) $21 \times \frac{5}{9} =$

d) $25 \times \frac{1}{12} =$

e) $3 \times \frac{31}{82} =$

f) $\frac{71}{42} \times 33 =$

2. Preenche, no teu caderno, a tabela abaixo.

a	b	c	d	a × b	a × d	c × b	c × d	b × d
3	0,21	$\frac{1}{2}$	100					
5	3,7	$\frac{3}{4}$	0,001					
12	90,25	$\frac{19}{3}$	1000					
7	0,02	$\frac{5}{11}$	0,01					
53	2,09	$\frac{13}{7}$	0,0001					

3. Resolve as operações seguintes.

a) 3,9 × 6,6 =

b) 3,7 × 8,5 =

c) 0,09 × 4,7 =

d) 7,109 × 0,1=

e) 48 × 5,5 =

f) 23 × 5,01 =

g) 9,263 × 41 =

h) 825 × 0,07 =

i) 128 × 0,01 =

j) 45 × 0,001 =

k) 2,36 × 0,01 =

l) 7,419 × 0,001 =

m) 32 × 100 =

n) 105 × 1000 =

o) 0,3401 × 100 =

p) 1,7 × 1000 =

4. Completa, no teu caderno, a tabela abaixo.

×	0	$\frac{1}{2}$	1,5	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$
0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0						
1,5	0						
$\frac{5}{4}$	0						
1	0						
$\frac{4}{5}$	0						
$\frac{6}{7}$	0						

Exercícios

1. Calcula.

a) $\frac{5}{7} \times \frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{18} \times 9$

c) $\frac{1}{2} \times \frac{6}{4}$

d) $\frac{3}{4} \times 0{,}5$

e) $\frac{25}{30} \times \frac{4}{14}$

f) $\frac{2}{3} \times 1{,}5$

g) $\frac{1}{5} \times 35$

h) $\frac{1}{6} \times 0{,}36$

2. Faz os cálculos indicados e simplifica os resultados obtidos para expressões simples (fracções irredutíveis).

a) $\frac{14}{15} \times 3$

b) $\frac{3}{5} \times 15$

c) $2\,\frac{1}{3} \times 6$

d) $5 \times \frac{4}{15}$

e) $12 \times \frac{7}{4}$

f) $3\,\frac{1}{5} \times 10$

g) $15 \times 3\,\frac{1}{5}$

h) $3\,\frac{3}{4} \times 8$

3. Calcula.

a) $\frac{3}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{12} \times 3 \times \frac{4}{5}$

c) $\frac{5}{8} \times 8 \times \frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \times 15$

e) $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{21}{20}$

f) $\frac{15}{3} \times 12 \times \frac{8}{22}$

g) $\frac{5}{12} \times 3 \times \frac{4}{5}$

h) $\frac{15}{12} \times 3 \times \frac{16}{3}$

4. Calcula.

a) $15{,}2 \times 14{,}8 \times 5{,}3$

b) $1{,}2 \times 1{,}5 \times 3{,}9$

c) $4{,}02 \times 5{,}4 \times 6$

d) $3{,}02 \times 1{,}51 \times 3{,}1$

e) $12{,}8 \times 13{,}2 \times 4{,}7$

f) $1{,}6 \times 4{,}1 \times 5{,}07$

g) $34{,}5 \times 2{,}37$

h) $1{,}2 \times 43{,}76$

Potência de expoente natural

A multiplicação de números naturais, a multiplicação de números racionais absolutos e a multiplicação de números naturais por números racionais absolutos é sempre possível. Portanto, numa mesma operação é possível multiplicar vários números.

Observa os exemplos seguintes:

a) $2 \times 3 \times 7 \times 9 = 378$

b) $11 \times 2 \times 7 \times 14 \times 5 = 10780$

c) $2 \times 2 \times 2 = 8$

d) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

Uma **potência** é a multiplicação de factores iguais.

Exemplos:

a) $2 \times 2 \times 2 = 8$

b) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

As potências podem ser escritas de forma simplificada, com uma base e um expoente, ou seja, na forma a^n, em que:

a^n ········ expoente
········ base

A **base da potência** representa o factor que se repete numa multiplicação.

O **expoente da potência** representa o número de vezes que o factor (ou seja, a base) da multiplicação se repete.

Na potência $2 \times 2 \times 2$, o número 2 repete-se 3 vezes; logo, a potência pode ser escrita de forma simplificada: $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 2^3}$.
Analogamente, teremos: $\mathbf{5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4}$.

Exemplos:

Vamos registar em forma de potência os produtos das operações seguintes.

a) $3 \times 3 = ?$ **b)** $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = ?$ **c)** $5 \times 3 \times 2 = ?$

Solução:

a) $3 \times 3 = 9$ **b)** $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 16\,807$ **c)** $5 \times 5 \times 2 = ?$ (não é uma potência)

Nota: Nas operações acima observa-se que a alínea **c)** não é uma potência, porque os factores não são todos iguais.

A potência $\mathbf{a^n}$, em que **a** e **n** são números naturais, é igual a **b**, se e somente se, a multiplicação de **n** factores **a** for igual a **b**.

$$a^n = b \iff \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n factores a}} = b$$

Na igualdade $\mathbf{a^n = b}$, tanto $\mathbf{a^n}$ como **b** chamam-se potência.

Exemplos:

a) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$; então: $3^5 = 243$

b) $7^2 = 7 \times 7 = 49$; então: $7^2 = 49$;

c) $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$; então: $2^6 = 64$

Exercícios

1. Escreve as potências abaixo, na notação $\mathbf{a^n}$:

a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = ?$ **c)** $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = ?$ **e)** $9 \times 9 \times 9 = ?$

b) $6 \times 6 \times 6 = ?$ **d)** $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = ?$ **f)** $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = ?$

2. Que números representam as potências abaixo:

a) $2^7 = ?$ **c)** $3^3 = ?$ **e)** $9^5 = ?$

b) $6^2 = ?$ **d)** $7^4 = ?$ **f)** $5^8 = ?$

1.2 Divisão de números naturais e de números racionais absolutos

Números primos e números compostos

Para compreendermos o que são números primos e números compostos é necessário conhecermos os divisores e os múltiplos de um número.

Recorda

Se **a**, **b** e **c** são números naturais, de modo que **a** $\times$ **b** = **c**, então **a** e **b** chamam-se divisores de **c**. Consequentemente, **c** é múltiplo de **a** e **b**.

Exemplos:

a) $3 \times 5 = 15$

Então:

Os números 3 e 5 são **divisores** de 15, ou o número 15 é **divisível** por 3 e 5. Logo, o número 15 é **múltiplo** de 3 (porque representa a multiplicação de 3 x 5) e é também **múltiplo** de 5 (porque representa a multiplicação de 5 x 3).

O número 4 **não é divisor** de 15 porque o número 15 **não é divisível** por 4. Assim, 15 **não é múltiplo** de 4 (porque não existe nenhum número natural que multiplicado por 4 o produto seja 15).

b) Se $1 \times 7 = 7$

Então:

Os números 1 e 7 são divisores de 7 e 7 é múltiplo de 1 e 7.

c) Se $1 \times 4 = 4$

Logo:

1 e 4 são divisores de 4 e 4 é múltiplo de 1 e 4.

Analogamente, podemos concluir que:

- Qualquer número natural ou racional absoluto **a** tem o número **1** como seu divisor.
- Qualquer número natural ou racional absoluto **a** é divisor de si mesmo.

Vejamos agora os conjuntos de divisores de alguns números naturais:

A = {Divisores de 1} = {1}

B = {Divisores de 2} = {1; 2}

C = {Divisores de 3} = {1; 3}

D = {Divisores de 4} = {1; 2; 4}

E = {Divisores de 5} = {1; 5}

F = {Divisores de 6} = {1; 2; 3; 6}

G = {Divisores de 7} = {1; 7}

H = {Divisores de 8} = {1; 2; 4; 8}

I = {Divisores de 9} = {1; 3; 9}

J = {Divisores de 10} = {1; 2; 5; 10}

K = {Divisores de 11} = {1; 11}

L = {Divisores de 12} = {1; 2; 3; 4; 6; 12}

M = {Divisores de 17} = {1; 17}

N = {Divisores de 18} = {1; 2; 3; 6; 9; 18}

O = {Divisores de 19} = {1; 19}

P = {Divisores de 20} = {1; 2; 4; 5; 10; 20}

Nota que os números 2, 3, 5, 7, 11, 17 e 19 têm apenas dois divisores, o número um (1) e eles mesmos. A estes números chamamos **números primos.**

Um número chama-se **primo** se admitir apenas dois divisores, o número um (1) e ele mesmo.

Repara que os números 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 e 20 chamam-se números compostos porque admitem mais de dois divisores.

Um número chama-se **composto** se admitir mais de dois divisores.

O número um (1) admite apenas um divisor: ele mesmo. Portanto, **não é** um número primo nem composto.

Exercícios

1. Indica todos os números primos compreendidos entre 0 e 100.

a) Qual é o maior número primo inferior a 50?

b) Qual é o maior número primo compreendido entre 50 e 100.

2. Entre os números seguintes, quais são os números primos?

3, 5, 11, 14, 24, 29, 37, 42, 47, 50,

Critérios de divisibilidade de números naturais

Critérios de divisibilidade por 2

Divide todos os números da tabela abaixo por 2 e coloca o resto no espaço correspondente.

Números	7	16	23	39	72	92	45	144	60	113	40	17	98
Resto da divisão por 2													

Diz quais são os números da tabela que, ao serem divididos por 2, têm como quociente um número natural e o resto zero. Certamente, verificaste que estes números terminam em 0, 2, 4, 6 e 8, ou seja, são números pares.

Um número é divisível por 2 quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, se o número for par. Os outros números não são divisíveis por 2.

Critérios de divisibilidade por 3

Na tabela abaixo, assinala com X os números que divididos por 3 dão resto zero e quociente igual a um número natural.

Números	24	83	72	46	92	642
Marca X						

1. Soma os algarismos dos números que são divisíveis por 3. Divide cada soma por 3.
2. Qual é o resto em cada caso? Certamente, concluíste que a soma dos algarismos destes números é divisível por 3.

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

Critérios de divisibilidade por 10 e 5

Na tabela seguinte, divide cada um dos números por 10 e coloca o resto no espaço correspondente.

Números	25	96	10	15	30	105	600	810
Resto da divisão por 10								

Certamente, verificaste que no caso de os números terminados em zero serem divididos por 10, o resto é zero.

Um número é divisível por 10 se o algarismo das unidades for 0.

Para encontrarmos um critério para a divisibilidade dos números por 5, realizamos o mesmo raciocínio.

Um número é divisível por 5 se o algarismo das unidades for 0 ou 5.

Exercício

Utiliza os critérios de divisibilidade e marca com X os números que são divisíveis por 2, por 5 e por 10.

Números	2	3	5	10
924				
96 300				
4586				
2961				
3670				
7557				
365				
23 091				
265 300				
67 425				
952				
459 720				

Agora, vamos conhecer os critérios de divisibilidade por 4, 6, 8 e 9.

Critérios de divisibilidade por 4 e por 8

Um número é divisível por 4 quando os seus dois últimos algarismos representam um número divisível por 4.

Exemplos:

- O número 100 tem, nos dois últimos algarismos, o número 00 que é divisível por 4. Logo, o número 100 é divisível por 4.
- O número 7312 tem, nos dois últimos algarismos, o número 12 que é divisível por 4. Logo, o número 7312 é divisível por 4.
- O número 5314 tem, nos dois últimos algarismos, o número 14 que não é divisível por 4. Logo, o número 5314 não é divisível por 4.

Um número é divisível por 8 quando os seus três últimos algarismos representam um número divisível por 8.

Exemplos:

- O número 1000 tem, nos três últimos algarismos, o número 000 que é divisível por 8. Logo, o número 1000 é divisível por 8.
- O número 734 352 tem, nos três últimos algarismos, o número 352 que é divisível por 8. Logo, o número 734 352 é divisível por 8.
- O número 31 423 904 tem, nos três últimos algarismos, o número 904 que é divisível por 8. Logo, o número 31 423 904 é divisível por 8.
- O número 9 532 743 tem, nos três últimos algarismos, o número 743 que não é divisível por 8. Logo, o número 9 532 743 não é divisível por 8.

Critérios de divisibilidade por 6 e por 9

Um número é divisível por 6 quando for par e a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Exemplos:

- A soma dos algarismos do número 13 572 é igual a 18 e 18 é divisível por 3. Logo, o número 13 572 é divisível por 6.
- No número 734 550, a soma dos seus algarismos é 24. 24 é divisível por 3. Logo, o número 734 550 é divisível por 6.
- A soma dos algarismos do número 9532 é igual a 19 e 19 não é divisível por 3. Logo, o número 9532 não é divisível por 6.

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Exemplos:

- A soma dos algarismos do número 43 875 é igual a 27 e este é divisível por 9. Logo, o número 43 875 é divisível por 9.
- A soma dos algarismos do número 57 600 000 é igual a 18 e 18 é um número divisível por 9. Logo, o número 57 600 000 é divisível por 9.
- A soma dos algarismos do número 79 553 é igual a 29. O número 29 não é divisível por 9. Logo, o número 79 553 não é divisível por 9.

Decomposição de números naturais em factores primos

Para decompor um número em factores primos, divide-se o número por números primos até se chegar a um quociente igual a um (1). Significa que se transformou o número em factores primos.

Geralmente, começamos por dividir o número pelo menor número primo possível, observando os critérios de divisibilidade.

Observa:

28 : 2 = 14 14 : 2 = 78 7 : 7 = 1 1 : 1 = 1 $28 = 2 \times 2 \times 7 \times 1$	30 : 2 = 15 15 : 3 = 5 5 : 5 = 1 1 : 1 = 1 $30 = 2 \times 3 \times 5 \times 1$	108 : 2 = 54 54 : 2 = 27 27 : 3 = 9 9 : 3 = 3 3 : 3 = 1 1 : 1 = 1 $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1$

O que verificaste?

Ao decompormos um número inteiro em factores, de modo que todos os factores sejam números primos, estamos a decompor o número em factores primos.

Na decomposição de um número em factores primos alguns factores são repetidos, portanto, podem ser escritos em forma de potência. Sendo assim, para os três números decompostos acima, teremos:

$28 = 2 \times 2 \times 7 \times 1$ $28 = 2^2 \times 7 \times 1$	$30 = 2 \times 3 \times 5 \times 1$ $30 = 2 \times 3 \times 5 \times 1$	$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1$ $108 = 2^2 \times 3^3 \times 1$

Exemplo:

Vamos decompor, em factores primos, os números 128, 50 e 162.

Solução:

$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$
$128 = 2^7$

$50 = 2 \times 5 \times 5 \times 1$
$50 = 2 \times 5^2 \times 1$

$162 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1$
$162 = 2 \times 3^4 \times 1$

Exercícios

1. Decompõe em factores primos os números 34, 86, 145, 268, 410.
2. A soma dos dois maiores factores primos de 120 é:

   a) 9 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 10 **e)** 5 **f)** 7

Máximo divisor comum (m.d.c.). Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

Chamamos máximo divisor comum **(m.d.c.)** de dois ou mais números ao maior número entre os divisores comuns dos números dados.

Chamamos mínimo múltiplo comum **(m.m.c)** de dois ou mais números ao menor número entre os múltiplos comuns dos números dados.

Exemplo:

Vamos calcular o **m.d.c.** e o **m.m.c.** dos números 9 e 15.

Solução:

O número 9 é divisível por 1, 3 e 9.

O número 15 é divisível por 1, 3, 5 e 15.

Nota que os divisores comuns de 9 e 15 são os números 1 e 3. E o maior divisor comum é o número 3. Assim sendo, o **m.d.c. (9; 15) = 3**. Qual será o **m.m.c.**?

Os múltiplos de 9 são os números: 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; .... E os múltiplos de 15 são os números: 15; 30; 45; 60; 75; 90; ....

Assim, os múltiplos comuns dos números 9 e 15 são os números 45; 90; ...., sendo o menor múltiplo comum o número 45. Logo, o **m.m.c. (9; 15) = 45.**

Existe um outro procedimento usado na determinação do m.d.c. e do m.m.c. que se pode resumir em quatro passos. Observa os exemplos seguintes.

- Considera os números 18, 48 e 72. Determina o m.d.c.

1. Decompor em factores primos	$18 = 2 \times 3 \times 3$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
2. Escrever os produtos sob a forma potencial	$18 = 2 \times 3^2$ $48 = 2^4 \times 3$ $72 = 2^3 \times 3^2$
3. Seleccionar os factores primos comuns (de menor expoente)	2 e 3
4. Formar o produto das potências seleccionadas	$2 \times 3 = 6$ m.d.c. (18, 48, 72) = 6

Observando o procedimento acima, podemos afirmar que:

O máximo divisor comum (**m.d.c.**) de dois ou mais números é igual ao produto dos factores primos comuns de menor expoente.

Para dois números naturais **a** e **b** nem sempre existe um número natural **c**, tal que **a** e **b** sejam divisíveis por **c**; ou seja, existem números que não têm um divisor comum, como por exemplo os números 7, 24, 25 e 121.

- Considera os números 18, 48 e 60. Determina o **m.m.c.**

1. Decompor em factores primos	$18 = 2 \times 3 \times 3 \times 1$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1$ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1$
2. Escrever os produtos iguais em forma de potência	$18 = 2 \times 3^2 \times 1$ $48 = 2^4 \times 3 \times 1$ $60 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 1$
3. Seleccionar os factores primos comuns e não comuns, de maior expoente.	2^4, 3^2 e 5
4. Formar o produto dos factores seleccionados	$2^4 \times 3^2 \times 5 = 16 \times 9 \times 5 = 720$ m.m.c. (18, 48, 60) = 720

Observando o procedimento anterior, podemos afirmar que:

O mínimo múltiplo comum **(m.m.c.)** de dois ou mais números é o produto de factores comuns e não comuns de maior expoente.

Para dois números naturais **a** e **b** existe sempre um número natural **c**, tal que **c** seja um múltiplo de **a** e **b** simultaneamente. Ou seja, todos os números naturais têm um múltiplo comum. Por exemplo, os números 7, 24, 25 e 121 têm como **m.m.c.** o número 508 200.

Exercício

Determina o **m.m.c.** e o **m.d.c.** dos números abaixo:

a) 4; 9; 24

b) 8; 10; 12

c) 15; 18; 24; 21

d) 6; 34; 221

e) 44; 78; 143

f) 60; 1350; 675; 42

Ampliação e simplificação de fracções. Fracções equivalentes

Uma fracção pode ser transformada sem que o seu valor significativo mude. As transformações das fracções podem ser feitas por meio de ampliação ou simplificação. Às fracções que podem ser transformadas por ampliação ou por simplificação, chamamos **fracções equivalentes**.

Ampliar uma fracção é multiplicar os seus termos, o numerador e o denominador, pelo mesmo número, sendo este número diferente de zero.

Exemplos:

1. Amplia a fracção $\frac{3}{2}$.

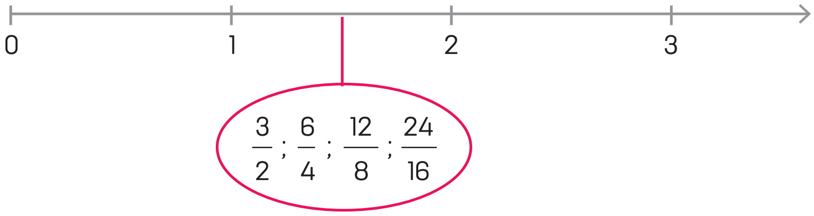
Solução:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{12}{8} = \frac{12 \times 2}{8 \times 2} = \frac{24}{16}$$

As fracções $\frac{6}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{24}{16}$ resultam da ampliação da fracção $\frac{3}{2}$.

Logo, as fracções $\frac{3}{2}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{24}{16}$ são fracções equivalentes.

Representação das fracções equivalentes numa semi-recta numérica:



Como podemos observar, as fracções $\frac{3}{2}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{24}{16}$, mesmo tendo diferentes numeradores e denominadores, representam um mesmo número na semi-recta numérica; por isso, são fracções equivalentes.

2. Amplia a fracção $\frac{2}{3}$.

Solução:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \times 5}{6 \times 5} = \frac{20}{30} = \frac{20 \times 7}{30 \times 7} = \frac{140}{210}$$

As fracções $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{140}{210}$ são fracções equivalentes.

Também podemos obter fracções equivalentes através da simplificação de fracções.

> **Simplificar** uma fracção é dividir os seus dois termos, o numerador e o denominador, pelo mesmo número, sendo este número diferente de zero.

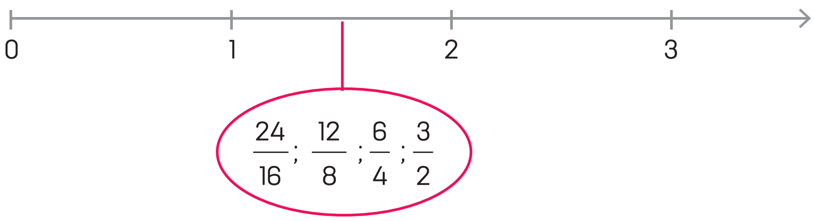
3. Simplifica a fracção $\frac{24}{16}$.

Solução:

$$\frac{24}{16} = \frac{24 : 2}{16 : 2} = \frac{12}{8} = \frac{12 : 2}{8 : 2} = \frac{6}{4} = \frac{6 : 2}{4 : 2} = \frac{3}{2}$$

Podemos dizer que as fracções $\frac{24}{16}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{3}{2}$ são fracções equivalentes.

Ao representar estas fracções numa semi-recta numérica, notamos que elas representam o mesmo número.



As fracções que, ao serem simplificadas ou ampliadas, representarem o mesmo valor numérico, chamam-se **fracções equivalentes**.

Dada uma fracção $\frac{a}{b}$, (b ≠ 0), pode-se obter fracções equivalentes através de ampliação e/ou simplificação da fracção dada.

Notaste que a fracção $\frac{3}{2}$ não pode mais ser simplificada? Isso acontece porque não existe um número natural que seja divisor de 3 e de 2, simultaneamente. Então, podemos dizer que esta é uma fracção irredutível.

Uma fracção chama-se **irredutível** se os seus termos, o numerador e o denominador, forem primos.

Uso do máximo divisor comum para a simplificação de fracções

Simplificar fracções cujos numeradores e denominadores são números grandes é mais trabalhoso. Nesses casos, pode-se recorrer ao **máximo divisor comum** para simplificar as fracções.

Exemplo 1: Simplifica a fracção $\frac{105}{140}$.

Solução:

$105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$

$140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

Então, o **m.d.c. (105; 140)** = $5 \times 7 = 35$

Agora, dividimos os dois termos da fracção pelo **m.d.c.**

$$\frac{105}{140} = \frac{105 : 35}{140 : 35} = \frac{3}{4}$$

Repara que, por usarmos o m.d.c., obtemos logo a fracção irredutível, equivalente à fracção inicial.

Exemplo 2: Simplifica a fracção $\frac{252}{266}$.

Solução:

$252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 7 \times 18$

$266 = 2 \times 133 = 2 \times 7 \times 19$

Então, **m.d.c. (252; 266)** = $2 \times 7 = 14$

Em seguida, dividimos os dois termos da fracção pelo **m.d.c.**

$$\frac{252}{266} = \frac{252 : 14}{266 : 14} = \frac{18}{19}$$

Mais uma vez, ao usarmos o m.d.c., obtivemos logo a fracção irredutível equivalente à inicial.

Exercícios

1. Amplia a fracção $\frac{5}{7}$, multiplicando-a, sucessivamente, pelos números 2; 3; 4; 7 e 12.

2. Representa as fracções $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{22}$; $\frac{7}{14}$; $\frac{27}{36}$; $\frac{21}{28}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{33}{44}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{9}{18}$; $\frac{15}{9}$; $\frac{25}{15}$; numa semi-recta numérica. Indica as fracções que são equivalentes.

3. Simplifica as fracções abaixo, usando o m.d.c.

   a) $\frac{36}{90}$; **c)** $\frac{153}{432}$;

   b) $\frac{600}{630}$; **d)** $\frac{300}{180}$;

4. Das fracções dadas, agrupa as fracções equivalentes.

   a) $\frac{1}{3}$; **d)** $\frac{4}{5}$; **g)** $\frac{5}{10}$;

   b) $\frac{2}{9}$; **e)** $\frac{2}{6}$; **h)** $\frac{14}{15}$;

   c) $\frac{3}{5}$; **f)** $\frac{3}{9}$; **i)** $\frac{21}{22}$;

5. Demonstra que as fracções são equivalentes, ao representá-las numa semi-recta numérica.

   $A = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ $B = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ $C = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

6. Completa as equivalências.

   a) $\frac{2}{3} = \frac{8}{}$ **b)** $\frac{1}{4} = \frac{}{12}$ **c)** $\frac{2}{5} = \frac{}{40}$ **d)** $\frac{1}{} = \frac{36}{12}$

7. Simplifica.

   a) $\frac{5}{15} =$ **c)** $\frac{12}{48} =$ **e)** $\frac{36}{72} =$ **g)** $\frac{16}{18} =$

   b) $\frac{14}{28} =$ **d)** $\frac{48}{96} =$ **f)** $\frac{72}{360} =$ **h)** $\frac{90}{900} =$

8. Determina as fracções equivalentes a $\frac{7}{9}$ cujos numeradores estão compreendidos entre 34 e 95.

9. Simplifica as seguintes fracções, usando o m.d.c.

   a) $\frac{328}{20} =$ **b)** $\frac{56}{38} =$ **c)** $\frac{620}{320} =$ **d)** $\frac{250}{75} =$

10. Observa as fracções abaixo e risca as que não são equivalentes a $\frac{12}{21}$.

    a) $\frac{4}{7}$ **b)** $\frac{120}{210}$ **c)** $\frac{102}{201}$ **d)** $\frac{24}{42}$ **e)** $\frac{4}{3}$ **f)** $\frac{36}{63}$ **g)** $\frac{3}{4}$ **h)** $\frac{60}{165}$

Divisão de números naturais e de números racionais absolutos

Como sabes, os números racionais absolutos podem ser escritos em forma de uma dízima, uma fracção ou como um número natural. No entanto, é importante compreender os procedimentos da divisão afectos aos números naturais e aos números racionais absolutos.

Divisão de fracções

Dividir fracções é tão simples quanto multiplicar fracções. Mas, para entendermos como dividir fracções, temos de saber inverter fracções, ou calcular o inverso de um número.

Observa o diálogo entre a Weza e a Laura, descrito abaixo:

A Weza e a Laura estavam a exercitar questões de Matemática. A Laura perguntou à Weza:

– Qual é o número que multiplicado por 7 dá 1?

A esta pergunta, a Weza respondeu:

– O número é $\frac{1}{7}$, pois $7 \times \frac{1}{7} = 1$

A Weza, em seguida, perguntou à Laura:

– E se o número for a fracção $\frac{5}{3}$, qual será o número que multiplicando por ele dá 1?

E a Laura respondeu:

– Neste caso, o número é $\frac{3}{5}$, porque $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$

Sabes porque tal acontece? Porque a fracção $\frac{1}{7}$ é o **inverso** de 7, e a fracção $\frac{3}{5}$ é o **inverso** da fracção $\frac{5}{3}$.

O inverso de um número é o número cujo produto com este é igual a 1. No caso de uma fracção, o inverso é a fracção obtida permutando os seus termos (o numerador e o denominador). Ou seja:

O inverso da fracção $\frac{a}{b}$ $(a \neq 0; b \neq 0)$ é a fracção $\frac{b}{a}$

Para dividir duas fracções basta multiplicar a fracção que representa o dividendo pelo inverso da facção que representa o divisor. Ou seja, dadas duas fracções $\frac{a}{b}$, $(b \neq 0)$ e $\frac{c}{d}$, $(c \neq 0; d \neq 0)$. Então:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{2} : \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{10}$

b) $\frac{35}{33} : \frac{5}{18} = \frac{35}{33} \times \frac{18}{5} = \frac{630}{165} = \frac{42}{11}$

c) $\frac{11}{3} : \frac{23}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{23} = \frac{55}{69}$

d) $\frac{14}{15} : \frac{28}{25} = \frac{14}{15} \times \frac{25}{28} = \frac{350}{420} = \frac{5}{6}$

Nota: Repara com atenção nos resultados dos exercícios das alíneas b) e d) e verás que foram simplificados até à fracção irredutível.

Divisão de uma fracção por um número natural

O Diogo decidiu oferecer $\frac{1}{3}$ das suas laranjas a dois dos seus colegas, tendo recebido, cada um deles, a mesma quantidade. Quanto recebeu cada um dos colegas?

Solução:

O Diogo ofereceu apenas $\frac{1}{3}$ das suas laranjas.

E dividiu esta quantidade em dois, dando metade a cada um dos seus colegas.

Para saber a fracção exacta que cada um recebeu basta dividir $\frac{1}{3}$ por dois:

$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

R: Cada um dos colegas recebeu $\frac{1}{6}$ das laranjas do Diogo.

Divisão de um número natural por uma fracção

O Samuel tem 15 litros de água para distribuir por vários cantis de capacidade $\frac{5}{4}$ do litro cada um.

Quantos cantis conseguirá o Samuel encher?

Solução:

Terá de distribuir os 15 litros pelos diversos cantis de capacidade igual a $\frac{5}{4}$ e, como já aprendeste em anos anteriores, distribuir corresponde, matematicamente, à divisão.

$15 : \frac{5}{4} = \frac{15}{1} : \frac{5}{4} = \frac{15}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{60}{5} = 12$

R: O Samuel conseguirá encher 12 cantis.

Divisão de uma fracção decimal por um número natural

A Fupa comprou 12,25 m de tecido, com os quais quer fazer 5 saias iguais para vender.

Quantos metros a Fupa precisa para fazer cada saia?

Solução:

Para sabermos quantos metros a Fupa deve utilizar para cada saia, dividimos 12,25 por 5.

Para tal, podemos começar por transformar 12,25 em fracção decimal.

$$12{,}25 : 5 = \frac{1225}{100} : 5 = \frac{1225}{100} : \frac{5}{1} = \frac{1225}{100} \times \frac{1}{5} = \frac{1225}{500} = \frac{2450}{1000} = 2{,}45$$

R: Para cada saia a Fupa deverá utilizar 2,45 m de tecido.

Divisão de dois números decimais

Vamos aprender a dividir números decimais através da transformação destes em fracções decimais.

Exemplos:

Determina o valor de:

a) 122,5 : 4,9

b) 5,25 : 1,5

Solução:

a) Transformamos os dois números decimais em fracções decimais:

$$122{,}5 : 4{,}9 = \frac{1225}{10} : \frac{49}{10} = \frac{1225}{10} \times \frac{10}{49} = \frac{12250}{490} = 25$$

b) Transformamos os dois números decimais em fracções decimais:

$$5{,}25 : 1{,}5 = \frac{525}{100} : \frac{15}{10} = \frac{525}{100} \times \frac{10}{15} = \frac{5250}{1500} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Exercícios

1. O Raúl decidiu dividir $\frac{1}{3}$ do seu chocolate pelos seus 4 amigos. Que parte do chocolate recebeu cada amigo?
2. O pai do Oziel decidiu vender os 12 l de azeite do seu depósito em garrafas de $\frac{3}{4}$ l. De quantas garrafas necessitará para conseguir distribuir todo o azeite?
3. De uma peça de tecido com 158,6 m de comprimento fizeram-se 12 retalhos. Quantos metros, em comprimento, mede cada retalho?
4. Sabendo que a área de um terreno rectangular é 52,78 m^2 e que a largura do terreno é 2,6 m, qual é o comprimento, em metros, do terreno?

   Nota: utiliza o método da transformação dos números decimais em fracções decimais.

Exercícios

1. Efectua as seguintes divisões, transformando os números decimais em fracções decimais.

a) 15,03 : 6

b) 13,09 : 10,5

c) 98,6 : 0,6

d) 3,5 : 1,7

e) 5 : 0,2

f) 0,5 : 0,001

g) 2,31 : 1,35

h) 0,75 : 3,9

2. A mãe da Amélia comprou uma caixa de morangos de 35 kg. A caixa contém caixinhas de 0,25 kg. Quantas caixinhas contém a caixa?

3. Quantos anéis de 0,01 kg se podem fabricar com 1 kg de ouro?

4. Quantas tabletes de chocolate de 0,020 kg se podem fabricar com 30 kg de chocolate?

5. Completa.

a) $3 : \frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{4} : \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4} : 5$

d) $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{7} : \frac{1}{15}$

f) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$

6. Faz os cálculos indicados e verifica os resultados.

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{81}{13} : \frac{18}{13}$

c) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

d) $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15}$

e) $\frac{0}{58} : \frac{3}{8}$

f) $6\frac{3}{5} : \frac{22}{10}$

g) $\frac{45}{23} : \frac{9}{46}$

h) $5\frac{4}{3} : \frac{19}{9}$

7. Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{5} : \frac{2}{5}$

b) $7 : \frac{1}{7}$

c) $\frac{1}{5} : \frac{1}{6}$

d) $\frac{6}{10} : 1$

e) $1 : \frac{1}{4}$

f) $\frac{1}{2} : \frac{1}{1}$

g) $3 : \frac{1}{5}$

h) $\frac{21}{9} : \frac{1}{100}$

8. Efectua as seguintes divisões, transformando os números decimais em fracções decimais e simplificando o resultado, sempre que possível.

a) 3,8 : 1,9 =

b) 0,25 : 0,5 =

c) 4,25 : 5,005 =

d) 3,28 : 2,03 =

e) 31,2 : 2, 31 =

f) 0,898 : 0,42 =

g) 32,484 : 21 =

h) 723,21 : 3 =

9. O Sr. Paiva vai percorrer a pé $\frac{3}{8}$ de 1 km em 4 dias. Sabendo que todos os dias ele percorre a mesma distância, calcula a fracção do quilómetro que corresponde a essa distância.

10. A mãe do Jorge sugeriu-lhe ler 25 páginas de um livro com 100 páginas, durante uma semana de férias, lendo todos os dias a mesma quantidade de páginas.

a) Que parte do livro o Jorge lerá numa semana?

b) Sabendo que o Jorge lerá sempre a mesma parte do livro por semana, de quantas semanas precisará para acabar de ler o livro?

1.3 Adição e subtracção de números naturais e de números racionais absolutos

Adição e subtracção de fracções com o mesmo denominador

Vamos, agora, recordar como adicionar e subtrair fracções com o mesmo denominador.

A Isabel comprou uma barra de chocolate e dividiu-a em 5 partes iguais.

No primeiro dia, a Isabel comeu $\frac{1}{5}$ e, no segundo dia, $\frac{3}{5}$.

a) Que parte do chocolate comeu a Isabel nos dois dias?

b) Que parte do chocolate sobrou?

Solução:

a) Para resolver este problema, vamos adicionar as duas fracções consumidas nos dois dias.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

R: A Isabel comeu $\frac{4}{5}$ do chocolate nos dois dias.

b) Conhecendo a parte de chocolate que a Isabel comeu, podemos calcular a parte que restou. Já se sabe que o chocolate foi dividido em partes iguais e que no total a Isabel tinha inicialmente $\frac{5}{5}$

A parte de chocolate que restou é igual a $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$

R: Sobrou $\frac{1}{5}$ do chocolate.

Para adicionar fracções de igual denominador, somam-se os numeradores e mantém-se o denominador.

Para subtrair fracções de igual denominador, subtraem-se os numeradores e mantém-se o denominador.

Exercícios

1. A Joana recebeu uma barra de sabão perfumado, que cortou em 10 partes iguais. Já utilizou 3 dessas partes. Com quantas ficou?

   Nota: aplica a subtracção de fracções com o mesmo denominador.

2. Calcula as somas ou subtracções das fracções seguintes.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{15}{13} - \frac{4}{13}$

c) $\frac{15}{13} + \frac{4}{13}$

d) $\frac{17}{15} + \frac{18}{15}$

e) $\frac{8+2}{15} + \frac{4}{15}$

f) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

g) $\frac{23}{25} - \frac{12}{25}$

h) $\frac{29}{53} - \frac{20}{53}$

i) $\frac{22}{12} - \frac{11}{12} - \frac{10}{12}$

j) $\frac{101}{344} - \frac{99}{344}$

k) $\frac{32}{63} - \frac{17}{63}$

l) $\frac{138}{19} - \frac{102}{19} - \frac{14}{19}$

m) $\frac{13}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$

n) $\frac{10}{6} + \frac{9}{6} - \frac{16}{6}$

o) $\frac{205}{120} + \frac{150}{120} - \frac{90}{120}$

p) $\frac{10}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6}$

q) $\frac{697}{173} - \frac{45}{173} + \frac{28}{173}$

3. Completa com a fracção que falta.

a) $\frac{9}{7} + \frac{}{} = \frac{15}{7}$

b) $\frac{18}{25} = \frac{}{} + \frac{8}{25}$

c) $\frac{13}{9} - \frac{}{} = \frac{5}{9}$

d) $\frac{19}{15} - \frac{}{} = \frac{7}{15}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{}{} = \frac{1}{9}$

f) $\frac{1}{4} + \frac{}{} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$

g) $\frac{6}{15} + \frac{}{} + \frac{2}{15} = \frac{15}{15}$

h) $\frac{}{} - \frac{3}{11} = \frac{11}{11}$

i) $\frac{}{} + \frac{9}{29} = \frac{22}{29}$

j) $\frac{22}{32} - \frac{}{32} = \frac{8}{32}$

Adição e subtracção de fracções com denominadores diferentes

Depois de teres recordado a adição e a subtracção de fracções com o mesmo denominador, verás como fazer as mesmas operações com diferentes denominadores.

Vejamos os exemplos:

a) $\frac{3}{2} + \frac{5}{7} =$

b) $\frac{8}{10} - \frac{2}{5} =$

A soma e a subtracção de fracções apenas são possíveis quando as fracções têm o mesmo denominador.

Portanto, para resolver os exemplos acima, teremos de recorrer ao conhecimento sobre a **ampliação** e a **simplificação** de fracções, ao **m.m.c.**, de modo a transformar essas fracções em fracções com **denominadores iguais**.

Solução:

a) O **m.m.c. (2; 7)** é o número 14. Logo, 14 será o denominador comum para as duas fracções.

– A fracção $\frac{3}{2}$ deve ser multiplicada por 7 para que o denominador seja 14.
Então teremos: $\frac{3 \times 7}{2 \times 7} = \frac{21}{14}$

– A fracção $\frac{5}{7}$ deve ser multiplicada por 2 para que o denominador seja 14.
Então teremos: $\frac{5 \times 2}{7 \times 2} = \frac{10}{14}$

Logo: $\frac{3}{2} + \frac{5}{7} = \frac{21}{14} + \frac{10}{14} = \frac{21 + 10}{14} = \frac{31}{14}$

b) O **m.m.c. (10; 5)** é o número 10. Logo, 10 será o denominador comum para as duas fracções.

– A fracção $\frac{8}{10}$ já tem o denominador igual a 10, portanto, não precisa ser multiplicada por nenhum número.

– A fracção $\frac{2}{5}$ deve ser multiplicada por 2 para que o denominador seja 10.
Então teremos: $\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$

Logo: $\frac{8}{10} + \frac{2}{5} = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} = \frac{8 + 4}{10} = \frac{12}{10}$

Para **adicionar** fracções com denominadores diferentes, deve-se:
- Transformá-las em fracções de denominadores iguais;
- Calcular a soma dos numeradores, mantendo o denominador comum.

Para **subtrair** fracções com denominadores diferentes, deve-se:
- Transformá-las em fracções de denominadores iguais;
- Calcular a diferença dos numeradores, mantendo o denominador comum.

Exercícios

1. Calcula estas somas e diferenças de fracções com denominadores diferentes.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$ **d)** $\frac{5}{7} + \frac{8}{14} =$ **g)** $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$ **j)** $\frac{10}{5} - \frac{6}{7} =$

b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$ **e)** $\frac{7}{8} - \frac{5}{12} =$ **h)** $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} =$ **k)** $\frac{2}{8} + \frac{8}{2} =$

c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{7} =$ **f)** $\frac{15}{8} + \frac{6}{9} =$ **i)** $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} =$ **l)** $\frac{8}{6} - \frac{3}{8} =$

2. A mãe da Kiara fez um pão caseiro para o jantar das filhas.

- a Kiara comeu $\frac{1}{4}$ do pão;
- a irmã da Kiara comeu $\frac{1}{8}$ do pão;
- a mãe comeu $\frac{2}{6}$ do pão.

a) Que quantidade de pão comeram as três?

b) Que quantidade de pão sobrou?

3. Utilizando o m.m.c., calcula as somas e as diferenças seguintes.

a) $\frac{5}{12} + \frac{13}{8}$ **d)** $\frac{11}{6} + \frac{2}{21}$ **g)** $\frac{4}{27} - \frac{5}{36}$

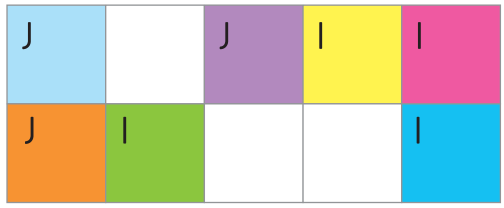
b) $\frac{12}{20} - \frac{8}{15}$ **e)** $\frac{17}{66} + \frac{3}{44} - \frac{2}{33} - \frac{7}{55}$ **h)** $\frac{39}{40} + \frac{49}{30}$

c) $\frac{11}{24} + \frac{17}{36} + \frac{7}{81}$ **f)** $\frac{4}{7} + \frac{1}{6} + \frac{5}{14} + \frac{16}{21} + \frac{1}{3} + \frac{17}{8}$ **i)** $\frac{35}{91} - \frac{25}{65}$

Adição e subtracção de fracções decimais

Vamos agora ver o exemplo seguinte:

O José e a Isabel estavam a pintar o pavimento da sala, que se apresenta dividido por quadrados:



No fim do processo de pintura, o pavimento ficou com o aspecto que podes observar na figura à direita. O José assinalou com **J** os quadrados que ele pintou e com **I** os que foram pintados pela Isabel.

Determina a parte do pavimento que foi pintada pelos dois.

Solução:

O José pintou $\frac{3}{10}$ ou 0,3 do pavimento e a Isabel pintou $\frac{4}{10}$ ou 0,4 do pavimento.
Os dois pintaram: $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ ou $0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$
A adição e a subtracção de fracções decimais pode ser operacionalizada em forma de fracção ou dízimas.

Exemplos:

Resolve as operações:

a) 13,005 – 2,346

b) 56,37 – 45,209

Solução:

a) $13{,}005 - 2{,}346 = \frac{13005}{1000} - \frac{2346}{1000} = \frac{13005 - 2346}{1000} = \frac{10659}{1000} = 10{,}659$

$$\begin{array}{r} 13{,}005 \\ -\ \ 2{,}346 \\ \hline 10{,}659 \end{array}$$

Então: 13,005 – 2,346 = 10,659

b) $56{,}37 - 45{,}209 = \frac{5637}{100} - \frac{45209}{1000} = \frac{56370}{1000} - \frac{45209}{1000} = \frac{56370 - 45209}{1000} = \frac{11161}{1000} = 11{,}161$

Lembra-te de que para somar ou subtrair dois números decimais devemos, antes, igualar o número de casas decimais para facilitar a organização dos números na operação armada. Deve-se sempre colocar as casas decimais debaixo de casas decimais, assim como as partes inteiras debaixo de outras partes inteiras, obedecendo à ordem e à classe dos números.

Assim sendo, na organização e na operação, teremos:

56,37 – 45,209 = 56,370 – 45,209 =

$$\begin{array}{r} 56,370 \\ -\ 45,209 \\ \hline 11,161 \end{array}$$

Então: 56,370 – 45,209 = 11,161

Adição e subtracção de fracções mistas

Todas as fracções escritas na forma $a\frac{b}{c}$ $(c \neq 0)$, chamam-se fracções **mistas**.

Todas as fracções **impróprias** (aquelas cujo numerador é maior do que o denominador) podem ser escritas na forma de fracções mistas.

Exemplo:

$$\frac{12}{5} = \frac{10+2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

Analogamente, podemos afirmar que uma fracção mista é a soma de um número natural com uma fracção.

Exemplos:

a) $7 + \frac{1}{3} = 7\,\frac{1}{3}$ **b)** $9 + \frac{5}{7} = 9\,\frac{5}{7}$ **c)** $5 + \frac{11}{12} = 5\,\frac{11}{12}$

Assim sendo, para adicionar ou subtrair fracções mistas, deve-se:

1.º adicionar ou subtrair as partes inteiras das fracções;

2.º adicionar ou subtrair as fracções.

- $3\,\frac{1}{2} + 10\,\frac{3}{5} = (3 + 10) + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}$ **m.m.c.** (2,5) = 10

  $13 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 13 + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = 13\,\frac{5+6}{10} = 14\,\frac{1}{10}$

- $7\,\frac{3}{4} + 5\,\frac{4}{5} = (7 + 5) + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

  $= 12 + \frac{15+16}{20}$

  $= 12\,\frac{31}{20}$

  $= 12 + \frac{20+11}{20}$

  $= 13\,\frac{11}{20}$

- $4\,\frac{2}{5} - 3\,\frac{1}{3} = (4 - 3) + (\frac{2}{5} - \frac{1}{3})$ **m.m.c.** (3,5) = 15

  $1 + (\frac{6}{15} - \frac{5}{15}) = 1 + \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$

Exercícios

Calcula.

- $5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{7}$
- $6\frac{5}{9} - 7\frac{2}{7}$
- $1\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- $10\frac{6}{15} + 8\frac{12}{60}$
- $7\frac{45}{50} + 5\frac{14}{28}$
- $18\frac{5}{75} + 20\frac{35}{210}$
- $9 - 6\frac{3}{5}$
- $4\frac{7}{4} - 3$
- $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{6}$
- $21 + \frac{9}{10}$

Adição e subtracção de números naturais e fracções

Somar ou subtrair um número natural e uma fracção qualquer implica obedecer aos procedimentos já estudados. De modo geral, todos os número podem ser transformados em fracções ou em números decimais. Depois, o procedimento é igual ao da soma ou da subtracção de fracções ou, ainda, ao de números decimais.

Exemplos:

Calcula as operações que se seguem.

a) $2 + \frac{3}{7} =$

b) $0{,}56 + 3 =$

Solução:

a) $2 + \frac{3}{7} = \frac{2}{1} + \frac{3}{7} = \frac{14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{14+3}{7} = \frac{17}{7}$

b) $0{,}56 + 3 = 0{,}56 + 3{,}00 = 3{,}56$ ou $0{,}56 + 3 = \frac{56}{100} + \frac{3}{1} = \frac{56}{100} + \frac{300}{100} = \frac{356}{100} = 3{,}56$

Propriedades comutativa, associativa e distributiva

Propriedade comutativa

A soma e a multiplicação são operações comutativas, ou seja:

Para qualquer número natural ou racional absoluto **a** e **b**, a soma é comutativa.
A igualdade **a + b = b + a** é sempre verdadeira.

Exemplos:

a) $23 + 78 = 101$ e $78 + 23 = 101$ então: $23 + 78 = 78 + 23$

b) $0{,}23 + 2{,}79 = 3{,}02$ e $2{,}79 + 0{,}23 = 3{,}02$ então: $0{,}23 + 2{,}79 = 2{,}79 + 0{,}23$

c) $\frac{23}{11} + \frac{7}{11} = \frac{23+7}{11} = \frac{30}{11}$ e $\frac{7}{11} + \frac{23}{11} = \frac{23+7}{11} = \frac{30}{11}$ então: $\frac{23}{11} + \frac{7}{11} = \frac{7}{11} + \frac{23}{11}$

56 – 45 = 11 e 45 – 56 = N.T.S. (Não Tem Solução para números naturais ou racionais absolutos) Então: $56 - 45 \neq 45 - 56$
A subtracção não é comutativa.

Para qualquer número natural ou racional absoluto **a** e **b**, a multiplicação é comutativa.
A igualdade $\mathbf{a \times b = b \times a}$ é sempre verdadeira.

Exemplos:

a) $23 \times 5 = 115$ e $5 \times 23 = 115$ então: $23 \times 5 = 5 \times 23$

b) $1{,}23 \times 12{,}5 = 15{,}375$ e $12{,}5 \times 1{,}23 = 15{,}375$ então: $1{,}23 \times 12{,}5 = 12{,}5 \times 1{,}23$

c) $\frac{2}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{18}{35}$ e $\frac{9}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{18}{35}$ então: $\frac{2}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{5} \times \frac{2}{7}$

$25 : 5 = 5$ e $5 : 25 = \frac{1}{5} = 0{,}04$ então: $25 : 5 \neq 5 : 25$
A divisão não é comutativa.

Propriedade associativa

A soma e a multiplicação são operações associativas, ou seja:

Para qualquer número natural ou racional absoluto **a, b** e **c,** a soma é associativa.
A igualdade **(a + b) + c = b + (a + c)** é sempre verdadeira.

Exemplo:

a) $(2 + 7) + 8 = 9 + 8 = 17$ e $2 + (7 + 8) = 2 + 15 = 17$ então: $(2 + 7) + 8 = 2 + (7 + 8)$;

b) $(9 - 4) - 3 = 5 - 3 = 2$ e $9 - (4 - 3) = 9 - 1 = 8$

Então: $(9 - 4) - 3 \neq 9 - (4 - 3)$ **A subtracção não é associativa**.

Para qualquer número natural ou racional absoluto **a, b** e **c**, a multiplicação é associativa.
A igualdade $\mathbf{(a \times b) \times c = b \times (a \times c)}$ é sempre verdadeira.

Exemplo:

a) (5 x 4) x 7 = 20 x 7 = 140 e 5 x (4 x 7) = 5 x 28 = 140 então: (5 x 4) x 7 = 5 x (4 x 7);

b) $(40 : 4) : 2 = 10 : 2 = 5$ e $40 : (4 : 2) = 40 : 2 = 20$

Então: $(40 : 4) : 2 \neq 40 : (4 : 2)$ **A divisão não é associativa.**

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtracção

Quando pretendemos simplificar ou calcular o valor numérico de expressões que envolvem a multiplicação, a adição e a subtracção, podemos aplicar propriedades para facilitar o cálculo.

Exemplos:

1. A Mónica tem 2 irmãos. Ela deu a cada um deles 3 rebuçados e 4 pastilhas.

No total, quantas guloseimas deu a Mónica?

Solução:

A Mónica deu a cada um deles:
$3 + 4 = 7$ guloseimas.

Por ter dado guloseimas aos dois irmãos teremos de multiplicar esta quantidade por dois, de forma a obter o valor total. Então, teremos:

$2 \times 7 = 14$

Esta operação também pode ser resolvida aplicando a propriedade distributiva. Assim sendo, teremos:

$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$

Como podes notar o resultado é o mesmo.

R: A Mónica deu 14 guloseimas.

2. A Mariana comprou 5 peras e 3 maçãs para levar para o hospital. Cada peça de fruta custou kz 50,00. Quanto pagou a Mariana pelas frutas?

Solução:

Quantidade total de frutas: $5 + 3 = 8$

Quantia total a pagar pelas frutas: Kz 50,00 $\times$ 8 = Kz 400,00.

Este exercício também pode ser resolvido aplicando a propriedade distributiva:

Kz 50,00 x (5 + 3) = 5 $\times$ Kz 50,00 + 3 $\times$ Kz 50,00 = Kz 250,00 + Kz 150,00 = Kz 400,00.

Observamos que o resultado é exatamente o mesmo.

R: A Mariana pagou Kz 400,00 pelas frutas.

A **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à **adição** aplica-se ao produto de um número por uma soma e é igual à soma dos produtos desse número por cada uma das parcelas.

Será que a multiplicação também é **distributiva** em relação à **subtracção**?

Exemplos:

1. A Fernanda comprou 4 cadeiras no armazém, cujo preço era de Kz 15000,00 cada. No entanto, foi feito um desconto de Kz 200,00 por cada cadeira. Quanto pagou a Fernanda no total?

Solução:

Quantia a pagar por cada cadeira:

Kz 15 000,00 – Kz 200,00 = Kz 14 800,00

A quantia a pagar pelas 4 cadeiras: 4 × Kz 14 800,00 = Kz 59 200,00

Aplicando a propriedade distributiva teremos:

4 × (Kz 15 000,00 – Kz 200,00) = 4 × Kz 15 000,00 – 4 × Kz 200,00 = Kz 60 000,00 – Kz 800,00 = Kz 59 200,00

Observamos que o resultado é o mesmo.

R: No total, a Fernanda pagou Kz 59 200,00.

2. O José compra todas as semanas 50 cromos e dá 15 ao seu amigo Carlos. Ao fim de um mês, com quantos cromos fica o José?

Solução:

Cromos com que fica o José, por semana:

50 – 15 = 35

Como um mês tem 4 semanas, 4 × 35 = 140 cromos.

Aplicando a propriedade distributiva, teremos:

4 × (50 – 15) = 4 × 50 – 4 × 15 = 200 – 60 = 140 cromos.

Observamos que o resultado é o mesmo.

R: O José fica com 140 cromos.

A **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à **subtracção** aplica-se ao produto de um número por uma diferença e é igual à diferença entre produto do número pelo aditivo e o produto do números pelo subtractivo.

Exercícios

1. Calcula, com base na propriedade distributiva.

a) $16 \times (10 - 7) =$

b) $5{,}2 \times (6 + 4) =$

c) $2{,}7 \times (13 - 10) =$

d) $6{,}7 \times (9 + 7) =$

2. Dadas as operações abaixo, transforma-as de modo que sejam apropriadas para a aplicação da propriedade distributiva.

a) $6 \times 9 + 6 \times 5$

b) $7 \times 93 + 16 \times 7$

c) $2{,}5 \times 5 + 0{,}8 \times 5$

d) $4{,}8 \times 2 + 4{,}8 \times 4$

e) $5{,}2 \times 6 - 5{,}2 \times 4$

f) $8 \times 3 + 8 \times 7$

g) $3 \times 24 + 9 \times 24$

h) $10 \times 2{,}3 - 3 \times 2{,}3$

i) $12 \times 3 + 1{,}2 \times 3$

j) $7{,}6 \times 9 + 9 \times 3$

k) $17 \times 4 + 4 \times 8$

l) $32 \times 8 + 14 \times 8$

3. O tio André comprou um terreno a prestações. Na primeira prestação, pagou o correspondente a metade do valor de venda do terreno. Na segunda prestação pagou um terço do valor do terreno. Que parte do valor do terreno falta pagar?

4. Um bolo foi dividido em quinze fatias iguais. O pai comeu um terço e a mãe comeu um quinto do bolo.

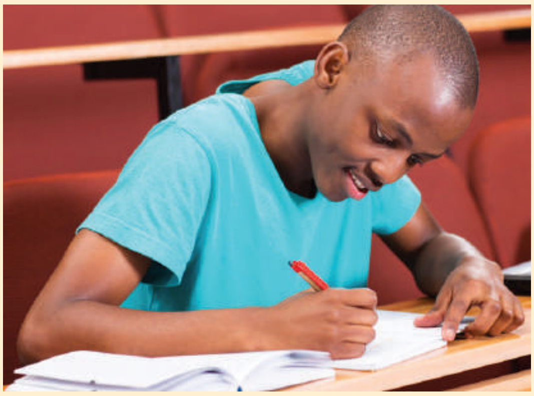
Quantas fatias de bolo sobraram?

5. Logo pela manhã, o menino Dias resolveu um quarto dos exercícios de matemática.

No período da tarde, resolveu um terço.

a) Sabendo que tinha um total de 12 exercícios, quantos exercícios resolveu?

b) Quantos exercícios ficaram por resolver?



6. Um auditório com 480 cadeiras está lotado com homens, mulheres e crianças. O número de mulheres é igual ao de crianças e o número de homens é dois quintos do número de mulheres. Sabendo que o número de crianças é igual a 200, quantos homens estão no auditório?

7. As turmas A e B da 6.ª classe têm no total 105 alunos. A turma A tem sete oitavos do número de alunos da turma B. Quantos alunos tem cada turma?

8. A Ana preparou um bolo, que comeu da seguinte forma: no primeiro dia comeu $\frac{3}{10}$ do bolo, no segundo dia comeu $\frac{2}{10}$ e no terceiro dia comeu $\frac{4}{10}$. Que parte do bolo sobrou?

9. Calcula, sob a forma fraccionária.

a) 3,5 + 2,18 + 21,009

b) 5,19 + 4,2

c) 6,4 + 10 + 1,38

d) 12 + 3,106 + 0,004

e) 0,7 + 0,25 + 4,008 + 1,572

f) 3,5 + 6,01 + 0,8

g) 0,008 + 0,014 + 1,006

h) 6,4 + 1,25 + 0,425 + 1,4

10. Quanto é necessário juntar a 15,7 para se obter 20,5?

11. Um motorista percorreu no primeiro dia 15 km, no segundo dia 19 km e 7 m e no terceiro dia 25 km e 8 m. Calcula a distância percorrida pelo motorista durante os três dias.

12. O José comprou 3,50 m de tecido para fazer duas calças. Numa usou 1,25 m e noutra usou 1,75 m. Quantos metros de tecido sobraram?

13. Calcula, aplicando a propriedade distributiva.

a) $3 \times \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)$
c) $\left(\frac{7}{11} - \frac{2}{11}\right) \times \frac{23}{25}$
e) $\left(\frac{5}{7} - \frac{7}{5}\right) \times 5\frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{7}{5} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{15}{45}$
d) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \times \frac{5}{3}$
f) $\left(\frac{8}{13} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5}$

14. Calcula, aplicando a propriedade comutativa.

a) $\frac{1}{4} \times 5 =$
c) $\frac{3}{2} \times \frac{6}{8} =$
e) $\frac{1}{5} \times 9 =$

b) $6 \times \frac{4}{3} =$
d) $\frac{7}{3} \times \frac{9}{7} =$
f) $\frac{12}{13} \times \frac{2}{5} =$

15. Completa.

a) $\frac{16}{9} \times$ ________ $= 1$
d) $\frac{53}{22} \times$ ________ $= 1$

b) $1 =$ ________ $\times \frac{9}{16}$
e) $\frac{15}{10} \times$ ________ $= 1$

c) $1 = \frac{1}{3} \times$ ________
f) $\frac{3}{14} \times$ ________ $= 1$

16. Aplica a propriedade associativa.

a) $\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2} \times \frac{6}{10} \times 4$

b) $\frac{11}{13} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$
e) $3{,}1 \times 2{,}5 \times 4$

c) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9}$
f) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$

17. Escreve os seguintes produtos em fracções decimais e calcula.

a) $0{,}12 \times 5$
d) $0{,}125 \times 8$
g) $33{,}2 \times 0{,}072$

b) $0{,}24 \times 0{,}25$
e) $0{,}0084 \times 13{,}7$
h) $0{,}3 \times 0{,}4 \times 0{,}5$

c) $33{,}2 \times 0{,}072$
f) $81{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}5$
i) $0{,}01 \times 0{,}01 \times 0{,}01$

18. Sabendo que $172 \times 35 = 6020$, escreve o valor dos seguintes produtos, sem efectuares os cálculos.

a) $0{,}172 \times 3{,}5$
c) $1{,}72 \times 0{,}35$
e) $1{,}72 \times 3{,}5$

b) $17{,}2 \times 3{,}5$
d) $17{,}2 \times 0{,}35$
f) $0{,}172 \times 0{,}35$

1.4 Comparação de números naturais e números racionais absolutos

Comparação de fracções

Para comparar duas fracções com o mesmo denominador, basta comparar os numeradores. A fracção com maior numerador será a maior e vice-versa.

Dadas duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ (b $\neq$ 0) teremos:

Se **a < c**, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$

Se **a = c**, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$

Se **a > c**, então $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$

Para comparar duas fracções com o mesmo numerador, basta comparar os denominadores. A fracção com o menor denominador será a maior e vice-versa.

Dadas duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{c}$ (b $\neq$ 0, c $\neq$ 0) temos:

Se **b < c**, então $\frac{a}{b} > \frac{a}{b}$

Se **b = c**, então $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Se **b > c**, então $\frac{a}{b} < \frac{a}{b}$

Para comparar duas fracções de diferentes numeradores e denominadores, podemos aplicar a multiplicação cruzada. Assim, o lado com o produto maior representará o lado da fracção maior e vice-versa.

Dadas duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{f}$ (b $\neq$ 0, f $\neq$ 0) temos:

Se **a** $\times$ **f < c** $\times$ **b**, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{f}$

Se **a** $\times$ **f = c** $\times$ **b**, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{f}$

Se **a** $\times$ **f > c** $\times$ **b**, então $\frac{a}{b} > \frac{c}{f}$

Exemplos:

Compara as seguintes fracções.

a) $\frac{7}{11}$ e $\frac{9}{11}$ **b)** $\frac{5}{13}$ e $\frac{5}{11}$ **c)** $\frac{17}{3}$ e $\frac{12}{5}$

Solução:

a) Os denominadores são iguais, então: $\frac{7}{11} < \frac{9}{11}$

b) Os numeradores são iguais, então: $\frac{5}{13} < \frac{5}{11}$

c) Numeradores e denominadores diferentes: $\frac{7}{3}$ e $\frac{12}{5}$

Nota: Fazendo a multiplicação cruzada temos 7×5 e 12×3 – 35 e 36 então $\frac{7}{3} < \frac{12}{5}$.

Comparação de números naturais e números racionais absolutos

Na comparação de números nem sempre é fácil determinar a relação de igualdade ou desigualdade entre eles. Entretanto, podemos recorrer a procedimentos que permitam observar, com maior facilidade, a relação entre esses números.

Exemplo:

Compara os seguintes números.

a) 2,5 e $\frac{5}{2}$

b) 7 e $\frac{67}{9}$

Solução:

Para comparar 2,5 e $\frac{5}{2}$ podemos antes converter a fracção em número decimal ou o número decimal em fracção e, em seguida, agirmos como na comparação de números decimais ou na comparação de fracções. Assim, teremos:

$2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$ então $\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

7 e $\frac{67}{9}$; sabendo que $7 = \frac{7}{1}$ teremos $\frac{7}{1}$ e $\frac{67}{9}$; ou seja, $\frac{7 \times 9}{1 \times 9}$ e $\frac{67}{9} = \frac{63}{9}$ e $\frac{67}{9}$, o que resulta em $\frac{7}{1} < \frac{67}{9}$

Exercícios

Compara os seguintes números, usando os sinais de >, < ou = :

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{5}$

b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$

c) $\frac{13}{10}$ e $\frac{3}{2}$

d) $\frac{12}{10}$ e $\frac{6}{5}$

e) $\frac{6}{7}$ e $\frac{6}{5}$

f) $\frac{13}{5}$ e $\frac{26}{10}$

g) $\frac{13}{11}$ e $\frac{13}{5}$

h) $\frac{7}{15}$ e $\frac{6}{15}$

i) 3,2 e $\frac{16}{5}$

j) 6,7 e $\frac{6}{5}$

k) 23,34 e 23,45

l) 234 e 45,5

m) $\frac{34}{6}$ e 5

n) 7 e $\frac{36}{5}$

o) $\frac{22}{11}$ e $\frac{27}{9}$

1.5 Expressões numéricas

Cálculo de expressões numéricas

Muitas vezes, as operações de adição, subtracção, multiplicação, bem como as potências e divisão, encontram-se de forma combinada em uma única operação. Vamos aprender a resolver expressões com duas ou mais operações matemáticas.

Exemplos:

a) $28 : 7 \times 2 =$

Solução: Esta operação pode ser resolvida de duas maneiras diferentes. Podemos:

1) Dividir 28 por 7 e depois multiplicar o quociente por 2 : $28 : 7 \times 2 = 4 \times 2 = 8$

2) Multiplicar o 7 por 2 e depois dividir o 28 pelo produto: $28 : 7 \times 2 = 28 : 14 = 2$

Para os dois casos obtemos resultados diferentes. Sabes qual dos procedimentos é o correcto? Se não, pergunta ao teu professor ou à tua professora.

b) $45 - 5 \times 2 + 3 =$

Solução: Esta operação pode ser resolvida de duas maneiras diferentes. Podemos:

1) Resolver segundo a ordem das operações: $45 - 5 \times 2 + 3 = 40 \times 2 + 3 = 80 + 3 = 83$

2) Resolver a subtracção e a soma primeiro e por último a multiplicação:
$45 - 5 \times 2 + 3 = 40 \times 5 = 200$

Qual dos procedimentos é o mais correcto? E sabes qual é o resultado correcto?

Para sabermos resolver ou avaliar se uma determinada operação está ou não correcta é necessário conhecermos os procedimentos e as regras aplicáveis. Por isso, vamos estudar as regras para a resolução das expressões com números que envolvem operações de adição, subtracção, multiplicação, potência e divisão.

Importa realçar que, numa expressão, além dos números e sinais de operações podemos encontrar os parênteses, portanto, os parênteses devem ser tidos em conta.

Assim, para calcular o valor de uma expressão numérica devemos obedecer à seguinte ordem de procedimentos:

I. Resolver as expressões que estão dentro de parênteses (são sempre resolvidas de acordo com a ordem descrita abaixo).

II. As potências, multiplicando as bases o número de vezes indicado nos expoentes.

III. A multiplicação e a divisão, segundo a ordem das mesmas na expressão.

IV. A soma e a subtracção, segundo a ordem das mesmas na expressão.

Exemplo: Seguindo estas regras, a alínea b) resolvida acima tem a seguinte solução:

$45 - 5 \times 2 + 3 = 45 - 10 + 3 = 38$

Vamos continuar a exercitar o que aprendemos.

Resolve as seguintes expressões numéricas:

a) $2 + 3 \times 7 - 154 : 7 =$

b) $7^2 : 7 \times (3 - 2) : 0{,}1 =$

c) $0{,}12 \times 100 : 2 - 13 =$

d) $(2 + 7^2 - 50) \times (10^2 : 50) + 2^2 \times 3^2 : 18 =$

Solução:

a) $2 + 3 \times 7 - 154 : 7 = 2 + 21 - 22 = 1$

b) $7^2 \div 7 \times (3 - 2) : 0{,}1 = 7^2 : 7 \times 1 : 0{,}1 = 49 : 7 \times 1 : 0{,}1 = 7 \times 1 : 0{,}1 = 70$

c) $0{,}1^2 \times 100 : 2 - \frac{1}{3} = 0{,}01 \times 100 : 2 - \frac{1}{3} = 1 : 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

d) $(2 + 7^2 - 50) \times (10^2 : 50) + 2^2 \times 3^2 : 18 = (2 + 49 - 50) \times (100 : 50) + 2^2 \times 3^2 : 18$

$= (1) \times (2) + 2^2 \times 3^2 : 18$

$= 1 \times 2 + 4 \times 9 : 18$

$= 2 + 2$

$= 4$

Exercícios

1. Resolve.

a) $23 - 9 - 7 + 4 + 5 - 13$

b) $3 \times 4 - 2 \times 5$

c) $14 : 7 - 12 \times 5 : 30$

d) $34 : 2 \times 7 : 17$

e) $96 : 24 \times 3 : 32$

f) $5^2 : 35 - 2^2 : 14 + 3^2 : 21$

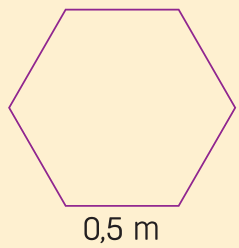
g) $7^2 - 6^2 : 3^2 + 5 \times 11$

h) $\frac{2}{3} + \frac{7}{2} : \frac{21}{2} + 5 - 6$

i) $2 \times (10 - 2 - 7) : 2 + (37 - 9 - 27) \times 30 : 10$

j) $\frac{1}{5} - \frac{7}{2} : 2 + \frac{3^2}{21} - (7^2 - 2^4 \times 3) : \frac{5}{2}$

2. A Dona Júlia comprou uma toalha de mesa com a forma de um hexágono regular, à qual decidiu aplicar uma renda. Cada metro de renda custa kz 2500,00. Pagou com uma nota de kz 10 000,00. Quanto recebeu de troco? Escreve a expressão numérica que te permite resolver o problema.



3. A Dona Idalina tinha 20 coelhos e 12 patos. O Sr. João comprou-lhe 6 coelhos e 3 patos. O Sr. António comprou-lhe 8 coelhos e 5 patos. Com quantos coelhos ficou a Dona Idalina? Nota: escreve a expressão numérica que te permite resolver o problema.

Tema 2

Equações
e inequações
Proporcionalidade

2.1 Equações e inequações lineares simples

Introdução às equações e às inequações

Antes de estudarmos as equações e as inequações vamos aprender o que são variáveis e termos, e o que é uma igualdade e uma desigualdade.

Numa expressão matemática, chamamos **variáveis** às letras que se encontram isoladas ou associadas a um número.

Exemplo:

$a + 3 \times b = c$; as letras a, b e c são variáveis.

Numa expressão matemática, os números, às variáveis e à combinação de números e variáveis com um sinal de multiplicação ou de divisão chamamos **termos**.

Exemplo:

$a + 5 \times y - 73 : 4 + 9$; esta expressão matemática tem quatro termos (a; $5 \times y$; $73 : 4$; 9); nota que os sinais operacionais de adição e de subtracção (+, -) separam um termo de outros.

Uma **igualdade** é uma expressão matemática que relaciona os seus termos por um sinal de igualdade. Nesta expressão, o sinal de igualdade divide os termos em dois grupos: o 1.º membro contendo os termos do lado esquerdo do sinal de igualdade e o 2.º membro contendo os termos do lado direito do sinal de igualdade.

Exemplos:

- $2 \times x + 4 = 10$; esta igualdade tem dois termos no membro esquerdo e um no membro direito.
- $34 = 5$; esta igualdade tem um termo em cada membro (a igualdade é falsa).

Uma **desigualdade** é uma expressão matemática que relaciona os seus termos por um sinal de maior ou menor. Nesta expressão, temos um membro esquerdo e um membro direito.

Exemplos:

- $38 : y > 4$
- $23 > 77$ (esta desigualdade é falsa).

Notas:

- A uma igualdade ou desigualdade em que aparecem apenas números chamamos proposição; uma proporcionalidade pode ser falsa ou verdadeira.
- Quando somamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma igualdade ou desigualdade pelo mesmo número, a igualdade ou a desigualdade mantém-se.

Exemplo:

Dada a igualdade 5 = 5 subtrai 2, multiplica por 12 e divide por 9, sucessivamente, os dois termos. Verifica se a igualdade se mantém verdadeira.

Solução:

$5 = 5 \mid -2$ (subtraindo 2)

$3 = 3 \mid \times 12$ (multiplicando por 12)

$36 = 36 \mid : 9$ (dividindo por 9)

$4 = 4$ (a igualdade mantém-se verdadeira)

Uma **equação** é uma igualdade que tem pelo menos uma variável.

Exemplos:

a) $3 \times y = 12$ **b)** $x + 7 = 17$ **c)** $y - 4 \times z = y - 7$

Uma **inequação** é uma desigualdade que tem pelo menos uma variável.

Exemplos:

a) $5 \times y + 2 < 5$ **b)** $x - 7 > 10$ **c)** $4 \times z < 7$

Vamos ver como determinar a solução de **equações**.

Exemplos:

1. Determina os valores das variáveis **a** e **b** que satisfaçam as seguintes **equações**:

- $a + 3 = 10$
- $b + 11 = 23$

Solução 1:

- $a + 3 = 10$

Para encontrar o número que satisfaz a igualdade, valor da variável, podemos usar o método de tentativa e erro. Esse método consiste em atribuir números à variável, até encontrarmos o valor que satisfaz a igualdade.

Para facilitar a procura do número que satisfaz essa igualdade podemos colocar a seguinte questão:

Qual é o número que somando 3 resulta em 10? É o número 7. Então: $a = 7$

Verificação:

Para verificar, vamos substituir na equação a variável a por 7, e teremos:

- $7 + 3 = 10$

A igualdade é verdadeira. Então, a solução desta equação é $a = 7$

Solução 2:

- $a + 3 = 10$

Também, podemos encontrar a solução da equação, aplicando operações inversas à equação, relativamente aos números que estão no mesmo membro que a variável.

Neste caso, para esta equação, para eliminar o número 3 vamos subtrair a equação toda por 3 (operação inversa – o 3 da equação faz a operação de adição).

- $a + 3 = 10 \quad | -3$
  $a + 3 - 3 = 10 - 3$
  $a + 0 = 7$
  $a = 7$

Verificação:

Aplicamos os métodos usados para encontrar a solução da segunda equação.

- $b + 11 = 23$

2. Determina os valores das variáveis **x** e **y** que satisfaçam as equações seguintes.

- $5 \times y = 15$
- $\frac{x}{4} = 4$

Solução:

- $5 \times y = 15$

Vamos encontrar a solução da equação aplicando a operação inversa relativamente ao número que está no mesmo membro que a variável.

Neste caso, vamos dividir a equação toda por 5 (operação inversa – o 5 da equação, faz a operação de multiplicação).

- $5 \times y = 15 \quad | : 5$
  $\frac{5 \times y}{5} = \frac{15}{5}$
  $\frac{5}{5} \times y = \frac{15}{5}$
  $y = 3$

Verificação:

Para verificar, vamos substituir na equação a variável **y** por 3. Então, teremos:

- $5 \times 3 = 15$

A igualdade é verdadeira. Então, a solução desta equação é $y = 3$.

3. Num outro caso, teremos a igualdade $\frac{x}{7} = 4$.

- $\frac{x}{7} = 4 \quad | \times 7$
  $\frac{x}{7} \times 7 = 4 \times 7$
  $x \times \frac{7}{7} = 28$
  $x = 28$

Substituindo na equação a variável **x** por 28, teremos:

- $\frac{28}{7} = 4$

Verificação:

A igualdade é verdadeira. Então, a solução desta equação é $x = 28$.

Exercícios

1. Dada as equações abaixo, determina os valores das variáveis.

a) $x + 7 = 44$
b) $y + 23 = 71$
c) $k \times 6 = 66$
d) $\frac{z}{45} = 2$
e) $3 \times \frac{a}{5} = 3$
f) $34 + b = 45$
g) $12 \times k = 6$
h) $\frac{c}{5} = 100$

Agora, vamos ver como determinar a solução de **inequações**.

Exemplos:

Determina a solução das seguintes inequações:

- $x + 8 > 20$
- $y \times 3 < 30$

Solução:

- $x + 8 > 20$

Podemos encontrar a solução da inequação ao aplicar a operação inversa, relativamente ao número que está no mesmo membro que a variável, tal como aplicado nas equações.

Neste caso, vamos **subtrair** a equação toda por 8.

- $x + 8 > 20 \qquad | -8$
- $x + 8 - 8 > 20 - 8$
- $x > 12$

Repara que a solução desta desigualdade é uma condição e não um número concreto. Portanto, se $x > 12$ então todos os números, sejam eles naturais ou racionais absolutos, maiores que 12 satisfazem a desigualdade. Vamos verificar.

Verificação:

– Se **x** for igual a 13 teremos: $13 + 8 > 20$ (desigualdade verdadeira).

– Se **x** for igual a 12,5 teremos: $12{,}5 + 8 > 20$ (desigualdade verdadeira).

– Se **x** for igual a 292 teremos: $292 + 8 > 20$ (desigualdade verdadeira).

Para as inequações, normalmente, pede-se a solução dentro de um dado conjunto numérico, para se evitar usar determinados números na solução. Vejamos:

- Dentro do conjunto dos números naturais a solução dessa inequação seriam todos os números naturais maiores que doze, ou seja: S = {13; 14; 15; 16; 17; 18; ...}.
- Dentro do conjunto dos números racionais absolutos a solução desta inequação seriam todos os números, deste conjunto numérico, maiores que doze, ou seja:$\{x \in Q_+ \mid x > 12\}$.

Nota: A cada um destes conjuntos chamamos **conjunto solução** da inequação. Repara que no conjunto dos números racionais absolutos não é possível discriminar a sequência numérica como no dos números naturais.

- Para $y \times 3 < 30$ teremos:

$$y \times 3 < 30 \qquad | : 3$$
$$(y \times 3) : 3 < 30 : 3$$
$$y < 10$$

Verificação:

– Se **y** for igual a 9 teremos: $9 \times 3 < 30$ (desigualdade verdadeira).

– Se **y** for igual a 5 teremos: $5 \times 3 < 30$ (desigualdade verdadeira).

– Se **y** for igual a 7,45 teremos: $7{,}45 \times 3 < 30$ (desigualdade verdadeira).

Observa que:

– Dentro do conjunto dos números naturais o conjunto solução dessa inequação será: S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9};

– Dentro do conjunto dos números racionais absolutos o conjunto solução será: $S = \{x \in Q_+ \mid x < 10\}$;

Nota: Para o conjunto dos números racionais absolutos não é possível discriminar todos os números menores que 10.

Exercícios

1. Determina o conjunto solução das inequações abaixo, tendo em conta o conjunto numérico das variáveis.

a) $x + 2 < 18$ $(x \in N)$

b) $y + 29 > 40$ $(y \in N)$

c) $4 \times a < 49$ $(a \in N)$

d) $b : 7 < 100$ $(b \in N)$

e) $b + 57 > 100$ $(b \in Q_+)$

f) $a : 25 < 7{,}5$ $(a \in Q_+)$

g) $x + 67 > 235$ $(x \in Q_+)$

h) $y \times 50 < 30$ $(y \in Q_+)$

2.2 Sucessões numéricas

Noção de sucessão numérica

Uma **sucessão numérica** é uma sequência de números escritos segundo uma certa ordem.

Exemplo:

Um agricultor cultivou, durante seis dias, várias áreas, conforme descrito abaixo.

No 1.º dia cultivou 2,5 ha.

No 2.º dia cultivou 2 ha.

No 3.º dia cultivou 3 ha.

No 4.º dia cultivou 1 ha.

No 5.º dia cultivou 2,5 ha.

No 6.º dia cultivou 3 ha.

Comecemos por representar, numa tabela, os dias e as áreas cultivadas.

Dias	1	2	3	4	5	6
Áreas cultivadas	2,5	2	3	1	2,5	3

Os números 2,5; 2; 3; 1; 2,5; 3; são uma sequência de números que representam as áreas cultivadas por dias específicos. Cada número da sequência corresponde a um dia.

Chamamos **sequência numérica ou sucessão numérica** a um conjunto de números que obedecem a uma determinda ordem. Cada número da sucessão chama-se **termo da sucessão**.

Cada termo da sucessão ocupa uma posição na sucessão: na tabela sobre o cultivo, o número 1 é o quarto termo da sucessão, o número 2 é o segundo termo da sucessão.

Exemplo:

Dada a sucessão 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14 indica o 2.º e o 5.º termos.

Solução:

O 2.º termo é o número 4 e o 5.º termo é o número 10.

Se uma sequência de números é uma sucessão, então podemos formar várias sucessões numéricas de diferente ordem. Por exemplo:

1. Sucessão formada por números naturais pares até 20;
2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20

2. Sucessão de números primos inferiores a 20;
3; 5; 7; 11, 13; 17; 19

3. Sucessão formada pelos múltiplos de 5 inferiores ou iguais a 60.
0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60

Exercícios

1. Completa as seguintes sucessões:

a) 0; 3; 6; 9; ___; ___; ___; 21; 24; ___; ...

b) 21; 26; 31; 36; ___; 46___: ___; ___; 66

c) 54; ___; 42; 36; 30; ___; ___; ___; 6

d) 108,5; 96; 83,5; ___; ___; 46; ___; 21; ...

Sucessões numéricas proporcionais

Uma sucessão numérica é uma sequência de números escritos segundo uma certa ordem estabelecida.

Vamos analisar em seguida dois exemplos.

a)

1.ª Sucessão	1	2	3	4	5
2.ª Sucessão	3	5	6	7	10

b)

1 .ª Sucessão	1	2	3	4	5
2.ª Sucessão	2	4	6	8	10

Mediante comparação, verificamos que:

- Nos dois exemplos acima, cada termo da segunda sucessão é maior do que o seu correspondente na primeira.
- No exemplo **b)**, obtemos cada termo da segunda sucessão multiplicando por 2 o termo correspondente da primeira, ou vice-versa, cada termo da primeira sucessão obtém-se multiplicando por $\frac{1}{2}$ o termo correspondente da segunda. Mas tal não se verifica nas sucessões do exemplo **a)**.

- No exemplo **a)** não encontramos um único número que permita encontrar uma das sucessões através da outra.
- A relação que existe entre as duas sucessões do exemplo **b)** chama-se proporcionalidade. E as sucessões referidas chamam-se **sucessões numéricas proporcionais**.

Duas sucessões numéricas são **proporcionais** se cada termo de uma sucessão se obtiver multiplicando por um factor constante o termo correspondente da outra. Este factor denomina-se **factor de proporcionalidade**.

Para investigar se duas sucessões numéricas são proporcionais, formamos os quocientes de cada dois termos correspondentes. Se todos os **quocientes forem iguais**, então as **sucessões numéricas são proporcionais**.

Proporcionalidade directa e inversa

Um automobilista percorre 30 km por dia. Quantos quilómetros percorre o automobilista em dois, quatro, cinco, oito e dez dias? Registamos os resultados numa tabela.

Dias	2	4	5	8	10
Distância em km	60	120	150	240	300

Obtemos assim duas sucessões: a sucessão representada pelo número de dias e a sucessão representada pela distância correspondente percorrida.

a) 2 4 5 8 10

b) 60 120 150 240 300

Repara que em dois dias o automobilista percorreu 60 km: 2×30 km = 60 km

Em 4 dias, o automobilista percorreu 120 km: $4 \times 30 = 120$ km

As duas sucessões são proporcionais.

Tal acontece porque, para obter a sucessão **b)**, a partir da sucessão **a)**, ter-se-á de multiplicar cada termo da sucessão **a)** por uma **constante de proporcionalidade** (neste caso, por 30) e, para obter a sucessão **a)**, a partir da sucessão **b)**, terá de se multiplicar cada termo da sucessão b) por uma **constante de proporcionalidade** (neste caso, por $\frac{1}{30}$).

Entre duas sucessões existe uma proporcionalidade directa se os quocientes entre os termos correspondentes forem iguais.

Repara que entre as sucessões 2; 4; 5; 8; 10 e 60; 120; 150; 240; 300; existe uma **proporcionalidade directa**. Sendo 30 ou $\frac{1}{30}$ as **constantes de proporcionalidade**.

$$\frac{60}{2} = \frac{120}{4} = \frac{150}{6} = \frac{240}{8} = \frac{300}{10} = 30$$

No caso de proporcionalidades inversas, a constante é inversa.

Entre duas sucessões existe uma **porporcionalidade inversa** se os quocientes entre os termos de uma das sucessoes pelo inverso dos termos correspondentes da outra sucessão forem iguais.

Exemplos:

Dadas as sucessões abaixo, verifica se há uma proporcionalidade inversa entre elas:

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

b) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$

Solução:

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

b) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$

Ainda te lembras de como determinar o inverso de um número? Então, divide os termos da primeira sucessão numérica pelos inversos dos termos correspondentes da segunda sucessão.

Assim sendo, teremos: $1 : \frac{1}{1} = 1$; $2 : \frac{2}{1} = 1$; $3 : \frac{3}{1} = 1$; $4 : \frac{4}{1} = 1$; ... $9 : \frac{9}{1} = 1$

Notamos que o quociente é constante. Então, a proporcionalidade é inversa.

Exemplo:

A tabela seguinte relaciona as velocidades médias e os tempos gastos por diferentes veículos para efectuar o mesmo percurso entre duas localidades.

Velocidade média v (em km/h)	100	75	60	50	30
Tempo gasto t (em horas)	1,5	2	2,5	3	5

Será que existe proporcionalidade directa entre as duas variáveis?

Solução:

a) Vamos primeiro encontrar os inversos dos valores dos termos da segunda variável.

$1{,}5 = \frac{15}{10} \longrightarrow$ O seu inverso é $\frac{10}{15}$ $\quad 2 \longrightarrow$ O seu inverso é $\frac{1}{2}$ $\quad 2{,}5 = \frac{25}{10} \longrightarrow$ O seu inverso é $\frac{10}{25}$

$3 \longrightarrow$ O seu inverso é $\frac{1}{3}$ $\quad 5 \longrightarrow$ O seu inverso é $\frac{1}{5}$

b) Agora vamos dividir os valores dos termos da primeira variável pelos inversos dos termos da segunda variável.

$100 : \frac{10}{15} = 100 \times \frac{15}{10} = \frac{1500}{10} = 150$ $75 \div \frac{1}{2} = 75 \times 2 = 150$ $60 \div \frac{10}{25} = 60 \times \frac{25}{10} = \frac{1500}{10} = 150$

$50 \div \frac{1}{3} = 50 \times 3 = 150$ $30 \div \frac{1}{5} = 30 \times 5 = 150$

Notamos que o quociente é constante, logo a proporcionalidade é inversa.

Exercícios

Das proporcionalidades que se encontram nas tabelas seguintes, quais são as proporcionalidades directas? Porquê?

a)

A	1	2	3	4	5
B	6	12	18	24	30

b)

C	10	15	20	24	30	35
D	2	3	4	5	6	7

c)

E	1	2	3	4	5
F	10	20	30	40	50

d)

G	14	16	18	20	22	24
H	7	8	9	10	11	12

Sistema de coordenadas rectangulares.

Pares ordenados (abcissa e ordenada)

Dois termos correspondentes de duas sucessões numéricas formam um par numérico. Sejam as duas sucessões numéricas proporcionais seguintes.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	3	6	9	12	15	18	21	24	27

Se se determinar qual dos números de um par numérico se deve nomear primeiro, então o par denomina-se **par numérico ordenado**.

Assim, os pares ordenados (x, y) que se encontram na tabela são:

(1;3); (2;6); (3;9); (4;12); (5;15); (6;18); (7;21); (8;24); (9;27).

E os pares ordenados (y, x) são:

(3;1); (6;2); (9;3); (12;4); (15;5); (18;6); (21;7); (24;8); (27;9).

Representação gráfica de pares numéricos ordenados

Podemos representar um número numa semi-recta graduada. Analogamente, podemos representar pares numéricos ordenados em duas semi-rectas graduadas, com a mesma origem, perpendiculares entre si.

Estas duas semi-rectas formam o **sistema de coordenadas rectangulares** (sistema cartesiano) e representa-se frequentemente com as variáveis **x** e **y**:

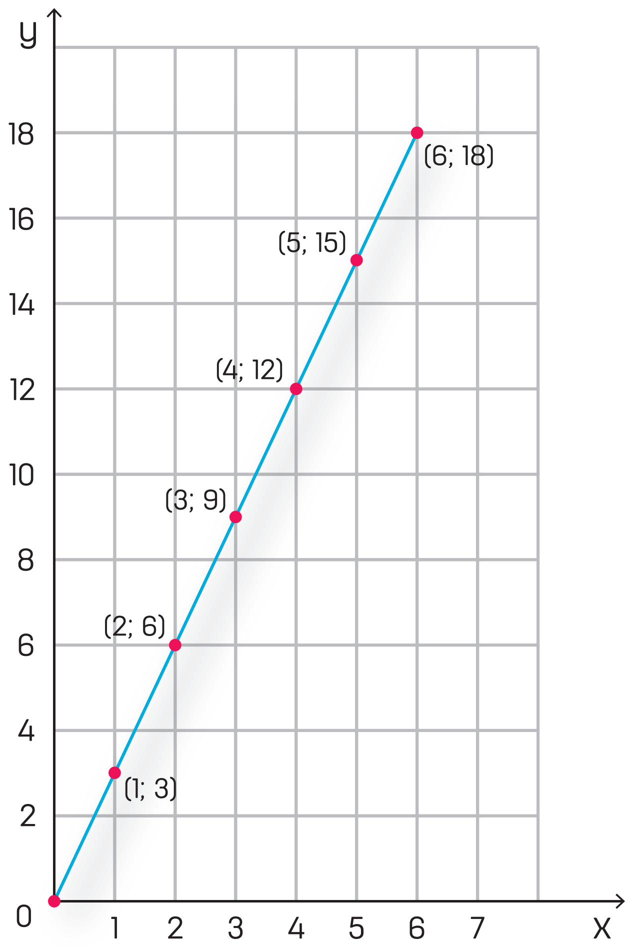
- O eixo de coordenadas representado por **x** denomina-se **eixo das abcissas** e é normalmente posicionado na horizontal;
- O eixo de coordenadas representado por **y** designa-se por **eixo das ordenadas** e é normalmente posicionado na vertical.

Exemplo:

Representa, num sistema de coordenadas rectangulares (sistema cartesiano), os pares ordenados das sucessões **x** e **y** apresentadas na tabela abaixo.

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

Solução:



Exercícios

1. A tabela seguinte refere-se a duas sucessões.

Tempo (h)	2	5	2,5	6	9	11
Distância (km)	120	300	150	360	540	660

a) Indica se nas duas sucessões há proporcionalidade directa.

b) No caso de serem proporcionalidades directas, calcula a constante de proporcionalidade.

2. Nas duas sucessões numéricas, dadas a seguir, indica os 5 primeiros termos.

a) A cada número natural faz-lhe corresponder o seu duplo.

b) A cada número natural faz-lhe corresponder o número que se obtém ao multiplicá-lo por $\frac{3}{2}$.

c) A cada número natural faz-lhe corresponder o seu triplo, diminuído em 2,5.

d) A cada número natural faz-lhe corresponder o seu quádruplo.

3. Investiga as sucessões numéricas (I) e (II) indicadas abaixo e verifica se são proporcionais.

Fundamenta as tuas afirmações.

Indica, em cada caso, a constante de proporcionalidade.

a) (I) 1; 2; 3; 4; 5; 6

(II) 3; 6; 9; 12; 15; 18

b) (I) 2; 4; 6; 8; 10; 12

(II) 3; 5; 7; 9; 11; 13

c) (I) 48; 42; 36; 30; 24; 18

(II) 24; 21; 18; 15; 12; 9

d) (I) 3; 5; 7; 9; 11

(II) 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{11}{3}$; 6; $\frac{22}{3}$

4. Representa, num sistema de coordenadas rectangulares, a relação entre as sucessões numéricas (I) e (II).

5. Determina a constante de proporcionalidade para as sucessões numéricas proporcionais.

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6

3; 6; 9; 12; 15; 18

b) 2; 3,5; 5; 6,5; 8

3; 5,25; 7,5; 9,75; 12

c) 2; 4; 6; 8; 10

18; 9; 6; 4,5; 3,6

2.3 Proporções e percentagens

Noção de proporção

Numa divisão, o quociente representa a comparação entre o dividendo e o divisor. Por conseguinte, o quociente entre dois números **a** e **b** (**a** : **b** ou $\frac{a}{b}$ em que **b** ≠ **0**) chama-se razão entre **a** e **b**.

Razão é a relação existente entre dois valores de uma mesma grandeza, expressa geralmente como "a para b", a:b ou $\frac{a}{b}$. Ao "a" dá-se o nome de **antecedente** e ao "b" dá-se o nome de **consequente**.

Vamos ver os exemplos seguintes:

1. Numa turma da 6.ª classe, podem-se contar duas alunas para cada 9 alunos. Isto é, 2 para 9 ou 2 : 9 ou $\frac{2}{9}$
2. A Joana comprou 8 kg de carne a Kz 8000,00 num supermercado e a sua irmã comprou 5 kg no talho e pagou Kz 5000,00. Das duas, qual comprou a carne a um preço mais alto?

Solução:

Para compararmos as duas grandezas, podemos registar os dados sob a forma de quociente. Assim sendo, teremos:

$\frac{\text{kz } 8000{,}00}{8 \text{ kg}}$ e $\frac{\text{kz } 5000{,}00}{5 \text{ kg}}$ se simplificarmos as duas fracções teremos:

$\frac{\text{kz } 8000{,}00}{8 \text{ kg}} = \frac{\text{kz } 1000{,}00}{1 \text{ kg}}$ e $\frac{\text{kz } 5000{,}00}{5 \text{ kg}} = \frac{\text{kz } 1000{,}00}{1 \text{ kg}}$

Notamos que as fracções são equivalentes porque as razões que apresentam são iguais. Logo, podemos registar:

$$\frac{\text{kz } 8000{,}00}{8 \text{ kg}} = \frac{\text{kz } 5000{,}00}{5 \text{ kg}} = \frac{\text{kz } 1000{,}00}{1 \text{ kg}}$$

Nota: esta igualdade lê-se: "8000 está para 8 como 5000 está para 5".

Chamamos **proporção** à igualdade entre duas razões. Ou seja:

$$a : b = c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

Termos de uma proporção

Consideremos, por exemplo, a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d$$

a, **b**, **c** e **d** são termos da proporção. Onde **a** e **d** são os **extremos** da proporção e **b** e **c** são os meios da proporção.

extremos

$$a : b = c : d$$

meios

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

extremos meios

Na proporção $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, 5 e 6 são extremos, 3 e 10 são meios.

Identidade fundamental de uma proporção

Seja a proporção $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$

Multiplicamos os meios: $5 \times 12 = 60$

Multiplicamos os extremos: $3 \times 20 = 60$

Assim, $5 \times 12 = 3 \times 20$

> Numa proporção, o produto dos **meios** é igual ao produto dos **extremos**.
> Isto verifica-se para todas as proporções.
>
> Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(b, d \neq 0)$, então $b \times c = a\ 3\ d$

Nota: lembra-te de que, numa igualdade temos dois membros: o membro esquerdo (termos que estão à esquerda do sinal de igualdade) e o membro direito (termos que estão a direita do sinal de igualdade).

Exercícios

1. Forma duas razões do mesmo valor numérico com os quatro números dados.

a) 14, 26, 28, 13 **b)** 4, 12, 6, 18 **c)** 5, 4, 10, 8 **d)** 5, 3, 25, 15

2. A partir da propriedade fundamental das proporções, resolve as seguintes equações.

a) $\frac{x}{12} = \frac{9}{36}$ **c)** $\frac{x}{15} = \frac{72}{4}$ **e)** $\frac{0,4}{0,8} = \frac{3}{x}$

b) $\frac{8}{x} = \frac{24}{3}$ **d)** $\frac{0,6}{3} = \frac{x}{6}$ **f)** $\frac{9}{2} : \frac{9}{7} = x : \frac{5}{7}$

3. Comprova se as seguintes proporções são proposições verdadeiras.

a) $\frac{3}{4} : 1 = 1\frac{1}{2} : 2$ **b)** $\frac{2{,}4}{1{,}5} : \frac{2{,}1}{1{,}4}$ **c)** $10 : 1{,}2 = 2{,}5 : 3$ **d)** $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$

4. Uma escola do Ensino Primário tem turmas da 5.ª e 6.ª classes. O número de alunos da 5.ª classe é dois terços do número de alunos da 6.ª classe.

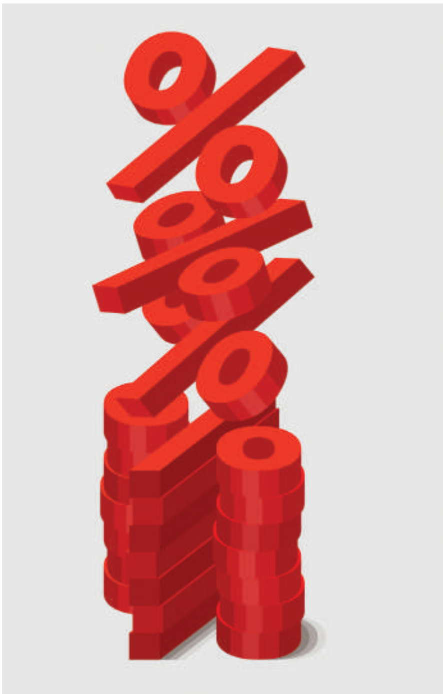
a) Escreve a razão entre os alunos da 5.ª classe e os da 6.ª classe.

b) Como estão matriculados 360 alunos na 6.ª classe, quantos alunos tem a escola?

Percentagens

Certamente, já ouviste falar de percentagens.

A percentagem indica uma proporção calculada em relação ao número 100 e representa-se pelo símbolo %.



Exemplos:

- aumento do salário de 10%;
- o preço da gasolina aumentou 3%;
- durante o mês de Dezembro foi feito um desconto de 30% sobre os preços de móveis, numa loja.

Mas o que é que significa tudo isto?

- 10% de aumento de salário significa que em cada kz 100,00 aumentam kz 10,00.
- 3% de aumento do preço da gasolina significa que em cada kz 100,00 que se pagava devem aumentar kz 3,00.
- 30% de desconto significa que em cada kz 100,00 gastos há um desconto de kz 30,00.

Uma percentagem é, portanto, uma razão expressa em centésimas, isto é, uma razão cujo consequente (denominador) é 100.

Ora, para se aplicar esta noção na prática e calcular percentagens, usa-se uma **notação**, em que o **valor de base** é sempre 100, sendo o **valor percentual** variável.

Vejamos os exemplos seguintes, quanto à notação:

- 10% (lê-se **dez por cento**) representa $\frac{10}{100}$ (10 de 100), ou seja, em 100 partes iguais tiramos 10 partes.
- 5% (lê-se **cinco por cento**) representa $\frac{5}{100}$ (5 de 100), ou seja, em 100 partes iguais tiramos 5 partes.

Exemplos:

1. A Joana teve um aumento de 10% no seu salário. Sabendo que ela ganhava Kz 120 000,00 quanto passará a receber de aumento? Qual é o salário actual da Joana?

Solução:

O salário da Joana antes do aumento era de Kz 120 000,00; logo, este é o valor de referência, ou seja, representa os 100%. Ao adicionar-se 10% a esse valor, teremos:

$\frac{\text{kz } 120\,000{,}00}{100\%}$ (Kz 120 000,00 está para 100%).

Queremos saber que valor em Kwanzas está para 10%, ou seja: $\frac{x}{10\%}$ (usamos a variável *x*, apenas para representar o valor desconhecido). Então:

$\frac{x}{10\%} = \frac{\text{kz } 120\,000{,}00}{100\%}$ (x está para 10% como Kz 120 000,00 está para 100%)

Usando a identidade fundamental de uma proporção, temos:

$x \times 100\% = \text{kz } 120\,000{,}00 \times 10\%$

Nota: numa igualdade podemos multiplicar ou dividir os dois membros pelo mesmo número e a igualdade não se altera.

Para determinamos o valor de x, vamos dividir a igualdade por 100%, de modo que o valor de 100% que está a multiplicar o x desapareça.

$x \times 100\% = \text{kz } 120\,000{,}00 \times 10\% \qquad | : 100\%$

$\frac{x \times 100\%}{100\%} = \frac{\text{kz } 120\,000{,}00 \times 10\%}{100\%}$

$x \times \frac{100\%}{100\%} = \text{kz } 12\,000,\,00$

$x = \text{kz } 12\,000{,}00$

R: A Joana teve um aumento de Kz 12 000,00. O salário actual da Joana é de kz 132 000,00.

2. Calcula: 15% de 300.

Solução:

300 representa 100%. Queremos saber o valor que representa 15%. Então teremos:

$\frac{x}{15\%} = \frac{300}{100\%}$ (x está para 15% como 300 está para 100%)

$x \times 100\% = 300 \times 15\% \quad | : 100\%$

$\frac{x \times 100\%}{100\%} = \frac{300 \times 15\%}{100\%}$

$x \times \frac{100\%}{100\%} = 45$

$x = 45$

R: 15% de 300 é igual a 45.

Exercícios

1. Calcula:

a) 12% de 20

b) 70% de 1000

c) 5% de 8

d) 85% de 50

e) 25% de 40

f) 32% de 80

2. Se ampliares 120% a imagem de um quadrado com 10 cm de perímetro, qual será a medida do perímetro da imagem ampliada?

3. Numa turma de 30 alunos, 10% reprovaram em Matemática. Quantos alunos passaram?

4. Um livreiro comprou 50 cadernos a Kz 75,00. Vendeu os 50 cadernos a Kz 100,00. Calcula o lucro em percentagem.

5. O Pedro obteve um desconto de 15%, que corresponde a Kz 30 000,00 na aquisição de 25 sacos de açúcar. Quanto pagou para adquirir 25 sacos?

Conversão de fracções em percentagens

As fracções representam uma parte do todo, em alguns casos o todo. Embora tenham a mesma analogia das percentagens, elas não são a mesma coisa. Porém, é possível transformar as fracções em valores expressos em percentagem.

Exemplos:

1. Converter $\frac{2}{5}$ em percentagem.

Solução:

Escrevemos a fracção $\frac{2}{5}$ em fracção decimal. Para termos 100 no denominador, temos de multiplicar os dois termos da fracção por 20.

R: Assim: $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100}$; logo, $\frac{40}{100} = 40\%$.

2. Converter $\frac{5}{8}$ em percentagem.

Solução:

Transformamos $\frac{5}{8}$ em número decimal $\frac{5}{8} = 0{,}625$.
Transformamos o número decimal em fracção decimal $0{,}625 = \frac{625}{1000}$
Reduzimos $\frac{625}{1000}$ a um denominador 100.

R: Assim: $\frac{625}{1000} = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$

Exercícios

1. Converte as seguintes fracções ordinárias em percentagens.

- $\frac{1}{8}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{3}{5}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{25}$
- $\frac{5}{6}$

2. A Rita retirou 5 lápis de uma caixa com 12. Que percentagem de lápis retirou a Rita?

3. O Paulo comeu 3 fatias de pão com 14 fatias. Que percentagem de pão comeu o Paulo?

Gráficos circulares

As **percentagens** podem ser representadas por **gráficos circulares**.

Um círculo completo corresponde a 100%, ou seja, representa o todo.

Exemplo:

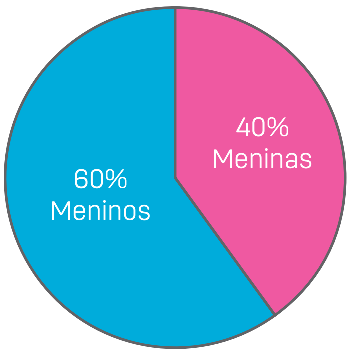
Numa escola, 40% dos alunos são do sexo feminino. Vamos fazer a representação dos alunos da escola num gráfico circular.

Solução:

Para representar 40%, percentagem correspondente às alunas num gráfico circular, podemos recorrer à representação geométrica de fracções, sabendo que 40% = $\frac{40}{100}$; logo, $\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

A divisão do círculo em partes iguais pode ser feita através dos ângulos. Sabendo que um círculo tem 360° (um ângulo giro), teremos:

Calcula-se 40% de 360° : $\frac{40}{100} \times 360° = \frac{40 \times 360°}{100} = \frac{14\,400}{100} = 144°$.



Exercícios

1. O Gaspar fez um inquérito a 20 alunos da sua turma sobre a sua bebida preferida ao pequeno-almoço. Dos 20 alunos que responderam ao inquérito, 50% prefere beber leite ao pequeno-almoço. Escolhe a alínea que corresponde a esta percentagem.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{4}$

2. Um inquérito efectuado a 360 pessoas indicou que:

– 49% são assalariados;

– 15% são agricultores;

– 35% têm profissões liberais;

– 10% são desempregados.

a) Calcula o número de pessoas dentro de cada categoria.

b) Constrói um gráfico circular referente às percentagens indicadas em 1.

Tema 3

Estatística

3.1 Introdução à Estatística

A Estatística é um ramo da Matemática que tem por objectivo recolher, organizar, analisar e interpretar informações sobre seres vivos, objectos ou fenómenos naturais. A estas informações dá-se o nome de **dados**.

Os dados podem ser organizados em tabelas e em gráficos, por serem formas de organização de informação que facilitam a análise e a interpretação de dados.

Os estudos estatísticos são muito usados porque permitem fazer previsões e tomar decisões importantes.

Recolha e organização de dados

Lê, atentamente, o seguinte exemplo:

Numa aula de Educação Física, o professor mandou pesar na balança 27 alunos que constituem a sua turma, tendo obtido o registo dos seguintes pesos em quilogramas:

21, 41, 61, 31, 21, 21, 61, 51, 41, 41, 21, 31, 41, 51, 31, 21, 61, 31, 41, 51, 31, 61, 51, 31, 21, 31, 61.

Podes identificar rapidamente quantos alunos nesta turma pesam 21 kg? Ou 61 kg?

De acordo com a forma de apresentação dos dados, não é fácil respondermos a esta pergunta.

Por isso, vamos organizar estes dados:

21, 21, 21, 21, 21, 21, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 41, 41, 41, 41, 41, 51, 51, 51, 51, 61, 61, 61, 61, 61.

Agora que organizámos os dados (o peso dos alunos) em ordem crescente, é mais fácil identificar quantos alunos têm um determinado peso.

Exercícios

Numa prova de Matemática, registaram-se as seguintes notas:

10, 11, 12, 10, 10, 13, 11, 14, 14, 12, 11, 10, 15, 15, 13, 13, 12, 14, 15.

a) Organiza os dados.

b) Diz, para cada nota registada, o total de alunos que a alcançaram.

c) Diz qual é o número total de alunos dessa turma.

Noção de frequência

Ao analisar os dados do exemplo anterior, verifica-se que o número de vezes que cada valor relativo ao peso dos alunos se repete e é diferente. Ou seja, a frequência absoluta dos diferentes valores dos pesos é diferente.

Recorda

A **frequência absoluta** de um conjunto de dados é o número de dados que pertencem a esse conjunto.

A **frequência relativa** corresponde à divisão da referida frequência absoluta pelo número total de dados.

Exemplo:

É possível realizar uma contagem do número de vezes que o valor de cada peso se repete e identificar a sua frequência absoluta.
21 kg – 𝍸 I, 31 kg – 𝍸 II; 41 kg – 𝍸; 51 kg – 𝍸; 61 kg – 𝍸

Ou seja:
21 kg → 6; 31 kg → 7; 41 kg → 5; 51 kg → 4; 61 kg → 5, logo o total de alunos é (6 + 7 + 5 + 4 + 5) = 27

Tabelas de frequências

As tabelas de frequências são uma forma de organizar os dados de maneira a facilitar a leitura dos mesmos.

Exemplo:

Após o registo dos dados numa tabela, é mais fácil responder à questão: Quantos alunos têm 41 kg?

Pesos	N.º de alunos
21	6
31	7
41	5
51	4
61	5
Total	27

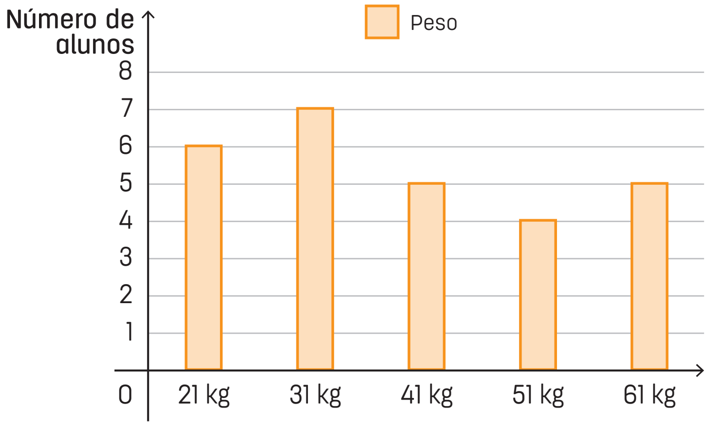
A resposta, como podemos ver na tabela acima, é: 5 alunos.

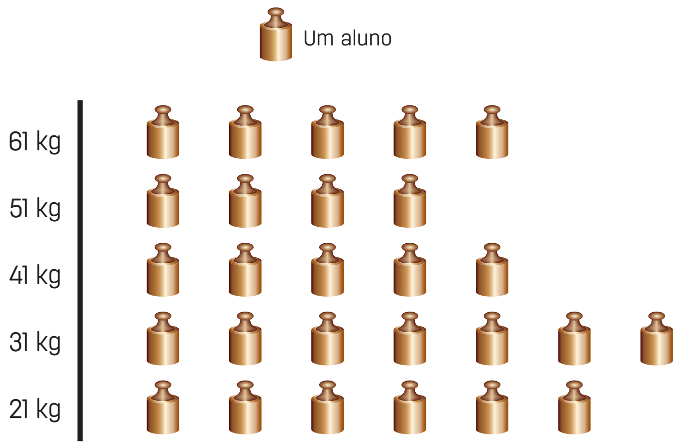
Gráficos

Os gráficos são outra forma de facilitar a leitura dos dados. Nas classes anteriores, aprendeste dois tipos de representações gráficas que existem para representar os dados: gráficos de barras e pictogramas.

Se utilizarmos os dados do exemplo anterior, podemos usar um gráfico de barras e pictogramas para representar os dados.

Exemplo:





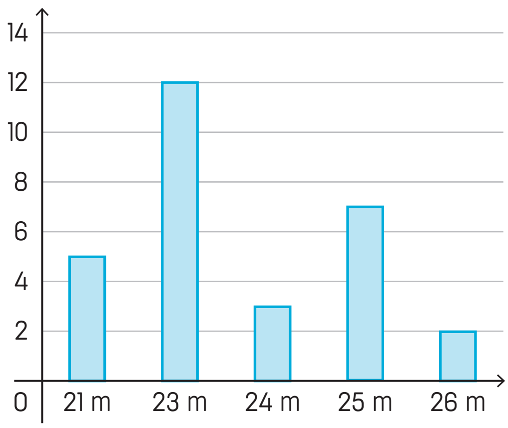
Exercícios

1. Os números representam as idades das pessoas entrevistadas à porta de uma escola, sobre o problema das alterações climáticas.

12	15	13	21	33	12	12	13	14	42	15	38	22	12
13	15	21	12	42	38	15	15	12	13	15	21	15	15

Organiza os dados e constrói uma tabela de frequências.

2. Partindo do gráfico de barras ao lado, inventa uma questão que possa ser resolvida através da sua análise e dá um título ao gráfico.



3.2 Medidas de tendência central

Na 5.ª classe, aprendeste algumas noções elementares de Estatística. Agora vais estudar a média aritmética, que é o quociente entre a soma dos valores de um conjunto de dados e número total desses dados.

Média aritmética

A Maristela teve as seguintes notas em Língua Portuguesa: 14, 13, 11, 15, 10, 16, 12, 15.
A professora deve dar a nota **média** para decidir a sua nota final. A nota média da Maristela em Língua Portuguesa é obtida somando todas as notas obtidas e dividindo o resultado pelo número total de notas:

$$\frac{14 + 13 + 11 + 15 + 10 + 16 + 12 + 15}{8} = \frac{106}{8} = 13{,}25$$

A **média aritmética** é o quociente entre a soma dos valores parciais pelo número correspondente ao número de parcelas.

Por vezes, os valores repetem-se; por exemplo:

As notas da Laura em Matemática foram as seguintes: 15, 14, 14, 16, 13, 17, 14, 15

Para calcular a média, podes simplificar os cálculos:

$$\frac{2 \times 15 + 3 \times 14 + 16 + 17 + 13}{8} = \frac{118}{8} = 14{,}75 \text{ ou } 14{,}8$$

Moda

A moda é o valor da variável em estudo que mais se repete.

Se observarmos novamente o exemplo dos valores dos pesos dos 27 alunos registados numa aula de Educação Física, verificamos que o valor de peso que mais se repete é 31 kg. Assim, a **moda** dos valores dos pesos dos alunos é 31 kg.

Exercícios

1. Os números apresentados abaixo representam as classificações obtidas pelos alunos de uma turma da 6.ª classe, na disciplina de Matemática.

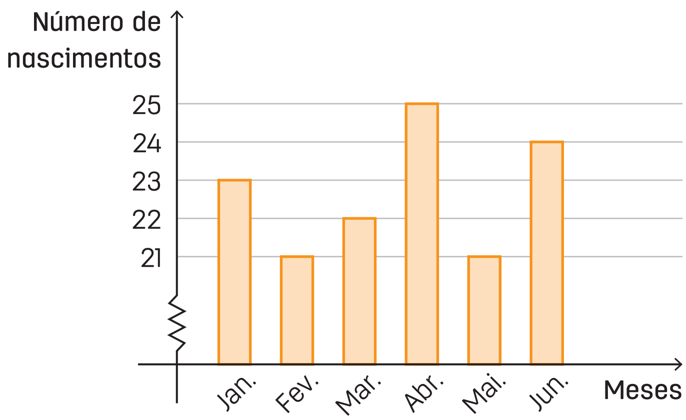
45%	67%	70%	46%	98%	70%	72%	67%	70%
48%	67%	70%	72%	70%	72%	70%	70%	72%
67%	73%	72%	72%	70%	70%	55%	65%	45%

a) Organiza os dados por ordem crescente.

b) Constrói uma tabela de frequência absoluta.

c) Identifica a moda dos resultados obtidos.

2. O gráfico que se segue indica o número de nascimentos numa dada província, no primeiro semestre de 2021.



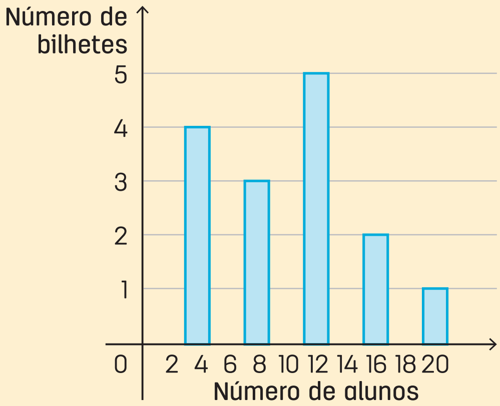
a) Quantos nascimentos houve nessa província no primeiro semestre de 2021?

b) Em que mês houve o maior número de nascimentos?

c) Em que mês houve o menor número de nascimentos?

Exercícios

1. A turma do Pedro organizou uma venda de rifas/bilhetes. O gráfico mostra quantos alunos compraram um mesmo número de bilhetes.
De acordo com o gráfico:



a) Quantos alunos compraram:

- 3 bilhetes?
- 2 bilhetes?
- 4 bilhetes?
- 5 bilhetes?

b) No total, quantos bilhetes foram vendidos?

2. Na escola da Marisa há 275 alunos. No refeitório da escola almoçam apenas alguns alunos. Nos primeiros cinco meses de 2021, o refeitório da escola serviu 1107 almoços. Na tabela estão registados os almoços servidos nos meses de Janeiro, Abril e Maio.

Meses	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
Número de almoços	214	...	...	220	235

a) Nos meses de Fevereiro e Março, o número de almoços servidos foi igual. Quantos almoços foram servidos em Fevereiro?

b) Determina a percentagem de alunos que almoçaram no refeitório, no mês de Abril.

3. A Isabel efectuou uma experiência que consistia em lançar um dado e registar o número de pintas da face voltada para cima. Abaixo encontram-se os resultados dos 20 lançamentos.

4 1 6 5 3 2 2 1 6 2 5 2 2 3 1 5 4 3 6 6

a) Classifica a variável em estudo.

b) Elabora uma tabela de frequência absolutas.

c) Qual é a média aritmética dos valores apresentados?

4. Nos dias de trabalho, o António e o Manuel almoçam na cantina. Na última segunda-feira disseram um ao outro:

Manuel: – Na semana passada gastei, em média, Kz 1750,00 por almoço.
António: – Eu não sei, mas guardei todas as facturas.

Valor das facturas dos almoços do António na semana passada (em Kz)				
Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Kz 2300,00	Kz 1800,00	Kz 3000,00	Kz 2900,00	Kz 1650,00

Qual dos amigos gastou mais dinheiro nos almoços da semana passada?

5. Numa campanha de vacinação contra a poliomielite, foram vacinadas crianças de um bairro da capital, Luanda, com as idades seguintes:

2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 5, 1

a) Organiza os dados.

b) Calcula a média da idade das crianças que foram vacinadas.

6. Em uma semana, o serviço meteorológico registou as seguintes temperaturas:

26°, 27°, 28°, 29°, 25°, 29°

Determina a média das temperaturas registadas.

7. Para fazer as batas dos alunos duma turma da 6.ª classe, mediu-se a altura de cada aluno e os valores foram registados em centímetros:

137, 138, 140, 140, 145, 120, 145, 141, 139, 151, 135, 154

a) Organiza os dados e indica quantos alunos medem cada altura registada.

b) Calcula a média aritmética das alturas destes alunos.

c) Com o auxílio dos teus colegas, procura saber a altura média dos alunos da tua turma.

Tema 4
Geometria

4.1 Construção geométrica de triângulos

Na 5.ª classe, aprendemos a classificar os triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados. Agora, vamos aprender alguns procedimentos geométricos usados na construção de triângulos.

A construção geométrica de triângulos baseia-se em várias possibilidades, que vais agora estudar.

Construção de um triângulo conhecida a medida de comprimento de dois dos seus lados e a amplitude do ângulo formado por eles

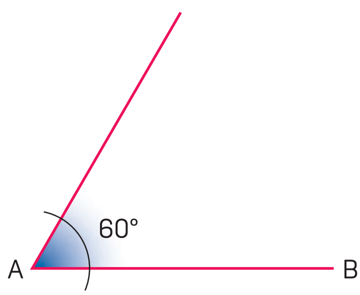
Exemplo:

Vamos construir um triângulo [ABC], conhecendo as medidas dos lados $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3,5$ cm e a amplitude do ângulo $B\hat{A}C = 60°$.

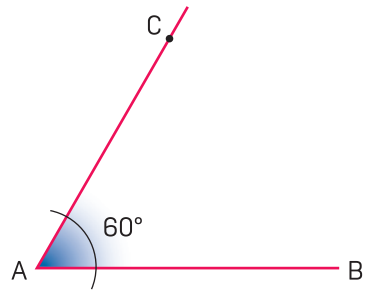
Construção

1.º Traça o lado $\overline{AB} = 4$ cm.

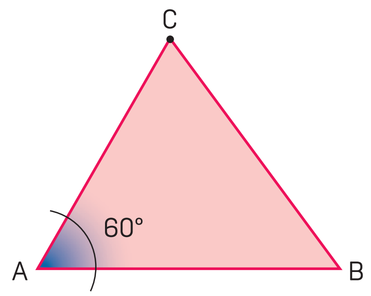
2.º Com o auxílio do transferidor, marca o ângulo de 60° com vértice em A.



3.º Marca o ponto C, medindo o comprimento $\overline{AC}$ com a régua, $\overline{AC}$ = 3,5 cm.



4.º Une os pontos A, B e C e obténs o triângulo [ABC].



Construção de um triângulo conhecido o comprimento dos seus lados

Exemplo:

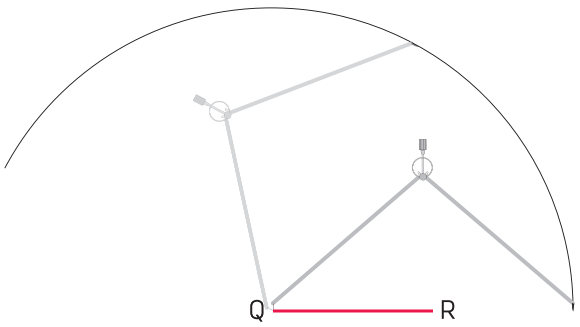
Vamos construir o triângulo [QRP], conhecendo as medidas dos lados $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ e $\overline{QR}$.

Dados: $\overline{PQ}$ = 4 cm; $\overline{PR}$ = 4 cm; $\overline{QR}$ = 2 cm.

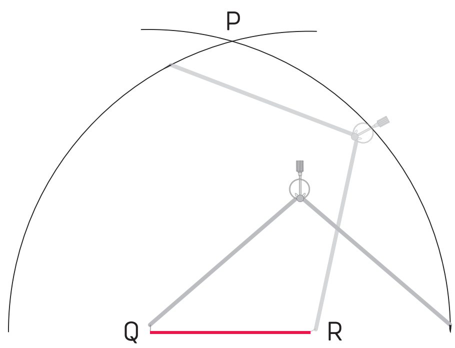
Construção

1.º Com o auxílio de uma régua, traça um segmento de recta $\overline{QR}$ de comprimento 2 cm.

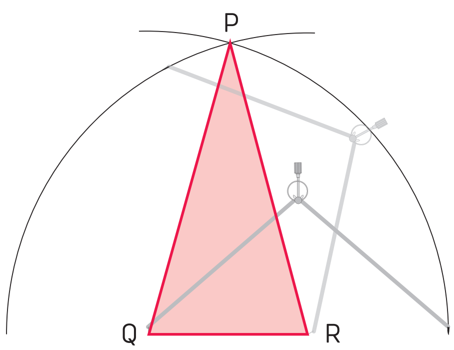
2.º Tendo em conta que o segmento $\overline{PQ} = \overline{PR} = 4$ cm, com a ponta seca do compasso no ponto Q do segmento de recta $\overline{QR}$, traça o arco de uma circunferência de raio 4 cm.



3.º Faz o mesmo na outra extremidade, no ponto R e, com a ponta seca do compasso nesse ponto do segmento de recta $\overline{QR}$, traça o arco de uma circunferência de raio 4 cm. Assinala o ponto de intersecção dos dois arcos, ponto P.



4.º Une os pontos Q, R e P e obténs o triângulo [QRP].



Construção de um triângulo conhecido os seus lados (três lados diferentes)

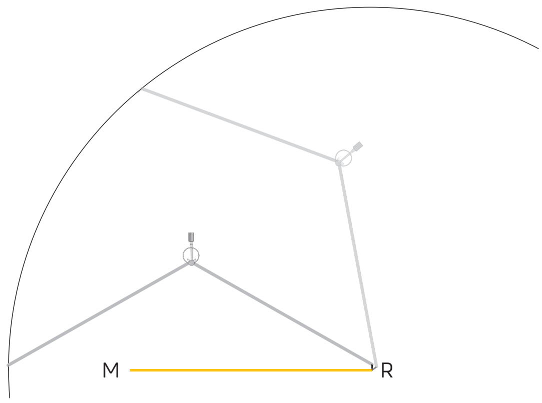
Exemplo:

Vamos construir o triângulo [MRA], conhecendo as medidas dos lados $\overline{MR}$ = 4 cm, $\overline{RA}$ = 6 cm e $\overline{MA}$ = 8 cm

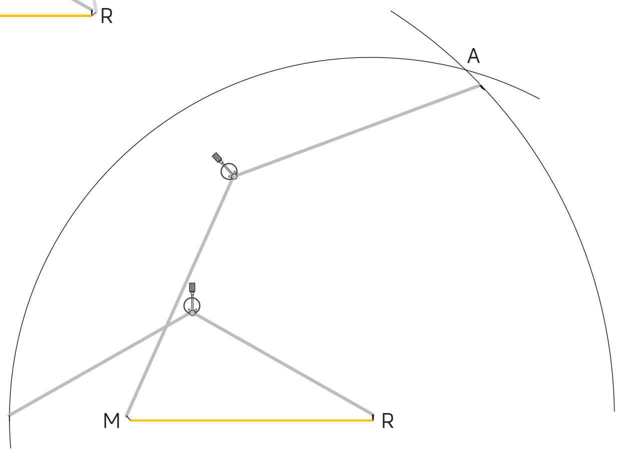
Construção

1.° Começa por traçar o segmento de recta $\overline{MR}$ com 4 cm.

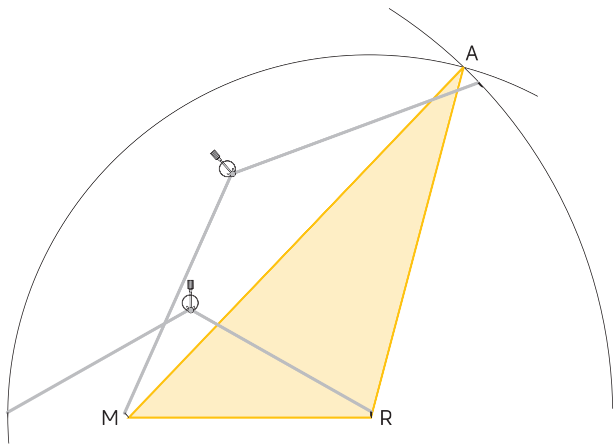
2.º Com o compasso, transporta a medida do segmento $\overline{RA}$ = 6 cm. Com a ponta seca do compasso no ponto R do segmento de recta $\overline{MR}$, traça o arco da circunferência de raio 6 cm.



3.º Com o compasso, transporta a medida do segmento $\overline{MA}$ = 8 cm. Com a ponta seca do compasso no ponto M do segmento de recta $\overline{MR}$, traça o arco da circunferência de raio 8 cm e faz intersectar o arco da circunferência de raio 6 cm, ao assinalar o ponto de intersecção por A.

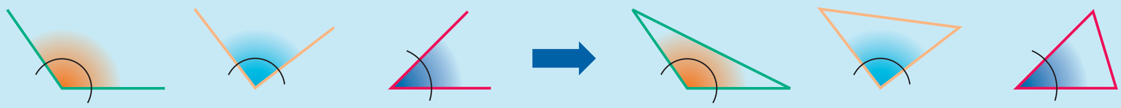


4.º Une os pontos A, M e R e obténs o triângulo [MRA].

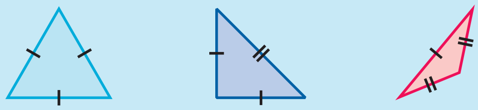


Recorda

Classificação de ângulos e triângulos



Ângulo obtuso | Ângulo recto | Ângulo agudo | Triângulo obtusângulo | Triângulo rectângulo | Triângulo acutângulo



Triângulo equilátero | Triângulo isósceles | Triângulo escaleno

Exercícios

1. Recorda agora a classificação de triângulos e escreve, no teu caderno, o nome dos triângulos indicados.

Tipos de ângulos	Nome do triângulo
Ângulo recto	
Ângulo obtuso	
Ângulo agudo	

2. Com a ajuda de uma régua e um compasso, constrói e classifica o triângulo [ABC].
Sendo: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 4$ cm

3. É dado um triângulo [DEF], e sabendo-se que $\overline{DE} = 4$ cm e que $\overline{DF} = 3$ cm, tendo o ângulo entre eles 90° de amplitude.

   a) De que tipo de triângulo se trata?

   b) Constrói-o.

4. Constrói um triângulo [ABC] que é obtusângulo em B e em que $\overline{BC} = 6$ cm e $\overline{AB} = 4$ cm.

5. Constrói um triângulo [LUA] em que $\overline{LU} = 3{,}5$ cm; $\overline{UA} = 6$ cm e $\overline{LA} = 2{,}7$ cm. Classifica-o quanto ao comprimento dos lados e quanto à amplitude dos ângulos internos.

Construção de um triângulo conhecida a amplitude de dois dos seus ângulos e a medida de comprimento do lado adjacente aos dois ângulos

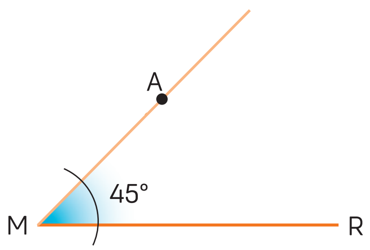
Exemplo:

Constrói o triângulo [AMR]. Sabe-se que as amplitudes dos ângulos adjacentes ao lado MR = 4 cm são: $R\hat{M}A = 45°$ e $M\hat{R}A = 30°$

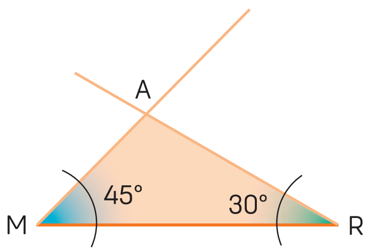
Construção

1.º Traça o segmento de recta $\overline{MR}$ = 4 cm.

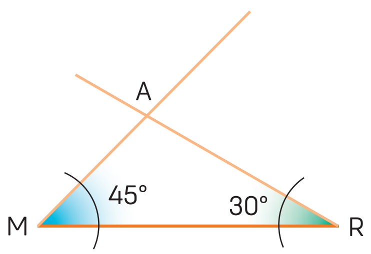
2.º Com o transferidor, traça o ângulo $R\hat{M}A$ de modo que $R\hat{M}A = 45°$.



3.º Com o transferidor, marca o ângulo $M\hat{R}A$ de modo que $M\hat{R}A = 30°$. Prolonga as semi-rectas, com origens em M e R, até que se encontrem no ponto A.



4.º Assim, podemos verificar que unindo os pontos M, R e A obtemos o triângulo [MRA].



Exercícios

1. Dado o comprimento do lado $\overline{EF} = 6$ cm, constrói o triângulo [EFG] tal que os ângulos $E\hat{F}G$ e $G\hat{E}F$ meçam, respectivamente, 110° e 40°. Classifica-o.

2. Constrói e classifica o triângulo [MNP]. $\overline{MN} = 3{,}5$ cm; $\overline{MP} = 4$ cm; $P\hat{M}N = 90°$.

3. Constrói e classifica quanto aos lados os seguintes triângulos.

   a) O triângulo [ABC]

   $\overline{AB} = 4$ cm

   $B\hat{A}C = 50°$

   $A\hat{B}C = 50°$

   b) O triângulo [MNP]

   $\overline{MN} = 4{,}5$ cm

   $\overline{MP} = 5$ cm

   $P\hat{M}N = 90°$

4. Completa a tabela, no teu caderno, indicando o nome dos triângulos com as seguintes medidas, depois de os construíres no teu caderno.

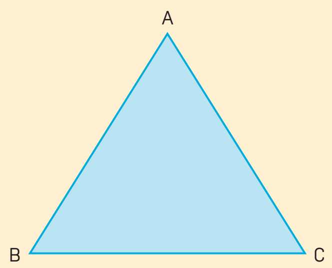
a	b	c	Nome do triângulo
3 cm	5 cm	2 cm	
4 cm	4 cm	4 cm	
3 cm	2 cm	3 cm	
5 cm	5 cm	2 cm	

5. Com o auxílio da régua, mede, em centímetros, o comprimento dos lados do triângulo [ABC] e completa.

$\overline{AB} =$

$\overline{BC} =$

$\overline{AC} =$

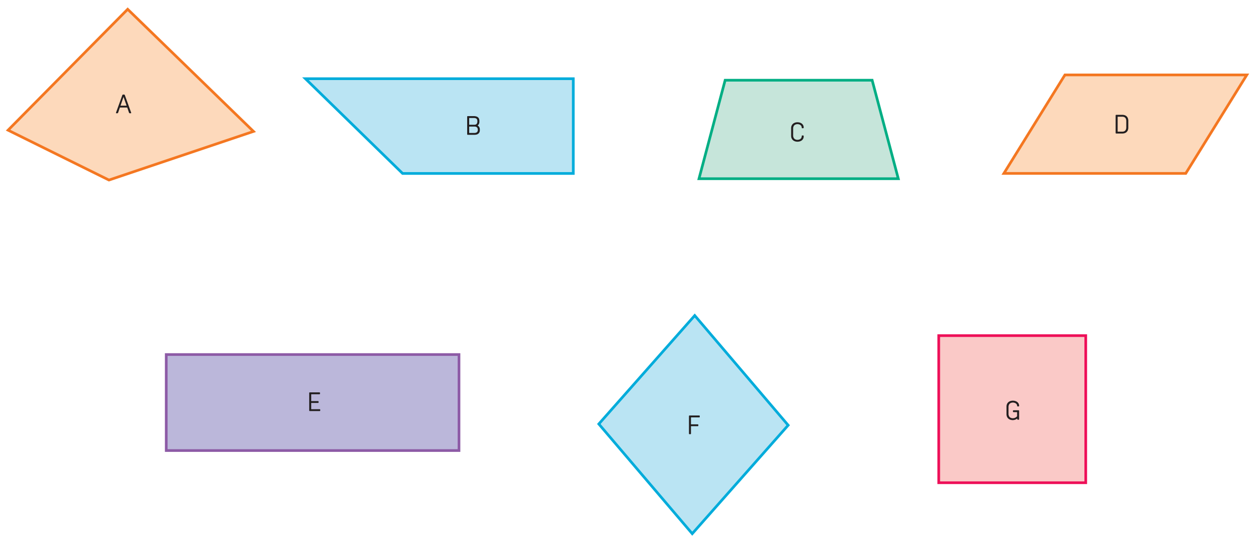


O triângulo [ABC] é um triângulo ____________________

4.2 Quadriláteros

Chama-se **quadriláteros** aos polígonos fechados, limitados por quatro segmentos de recta.

Observa as figuras.

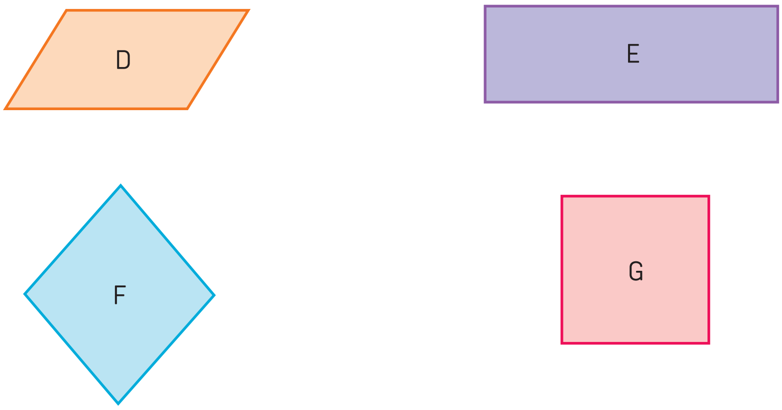


As figuras acima têm quatro lados, ou seja, quatro segmentos de recta; por isso são quadriláteros. Mas as figuras são diferentes entre si, como podes observar.

Classificação de quadriláteros

Os quadriláteros que têm dois dos seus lados paralelos são **trapézios**.

Os quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos são **paralelogramos**.



Os paralelogramos que têm os seus lados geometricamente iguais são **losangos** (não quadrados e quadradoos).

Os paralelogramos que têm os quatro ângulos rectos são paralelogramos **rectângulos**.

Existem dois tipos de paralelogramos rectângulos:

- Os que têm os quatro lados geometricamente iguais: são os **quadrados**. É o caso do paralelogramo G, acima;
- Os que têm os seus lados paralelos geometricamente iguais: são os **rectângulos**. É o caso do paralelogramo E, acima.

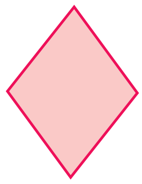
Propriedades de quadriláteros

Rectângulo não quadrado

- lados opostos paralelos, agrupados dois a dois
- lados opostos iguais, agrupados dois a dois
- quatro ângulos rectos

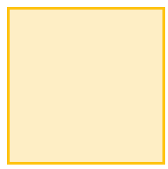
Losango não quadrado

- lados opostos paralelos, agrupados dois a dois
- lados opostos iguais, agrupados dois a dois
- ângulos opostos iguais, agrupados dois a dois



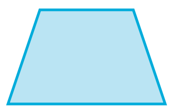
Quadrado

- lados opostos paralelos, agrupados dois a dois
- quatro lados iguais
- quatro ângulos rectos

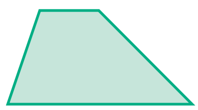


Trapézios

- um par de lados opostos paralelos;
- um par ou nenhum de lados opostos com o mesmo comprimento;
- dois pares de ângulos com a mesma amplitude: isósceles;

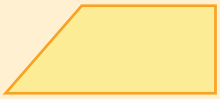
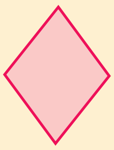
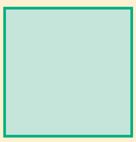
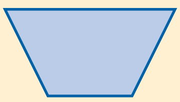


- um par de ângulos com a mesma amplitude: escaleno.

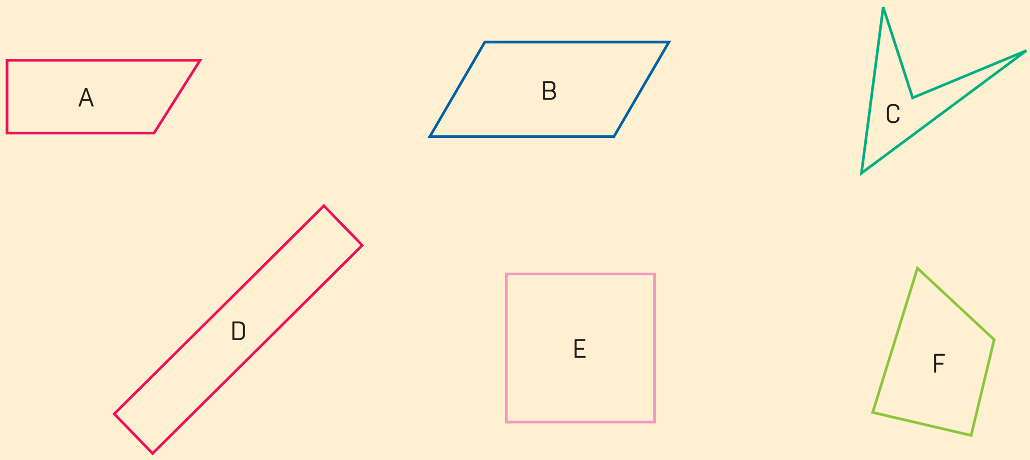


Exercícios

1. Copia e completa o quadro no teu caderno, escrevendo o nome de cada paralelogramo na primeira coluna e «sim» ou «não» nas outras colunas, atendendo às propriedades.

Paralelogramos	4 lados	1 par de lados paralelos	2 pares de lados paralelos	4 ângulos	4 lados iguais
 ______					
 ______					
 ______					
 ______					
 ______					

2. Observa os polígonos.



Indica:

a) Os quadriláteros.

b) Os trapézios.

c) Os rectângulos.

d) Os paralelogramos rectângulos.

e) Os paralelogramos não rectângulos.

f) Os quadrados.

3. Assinala se são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as seguintes afirmações:

- [ ] Os losangos têm lados iguais.
- [ ] Os losangos são quadrados.
- [ ] Os quadrados são rectângulos.
- [ ] Todos os quadriláteros são trapézios.
- [ ] Todos os trapézios são quadriláteros.
- [ ] Todos os paralelogramos são quadriláteros.
- [ ] Todos os quadriláteros são paralelogramos.
- [ ] Os rectângulos são paralelos.
- [ ] Os trapézios são paralelogramos.
- [ ] Os rectângulos não são quadrados.

4. Com ajuda da régua e do esquadro, desenha:

a) Um paralelogramo.

b) Um quadrado.

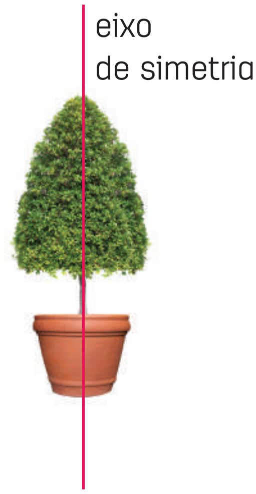
c) Um rectângulo.

4.3 Simetria

Introdução à simetria

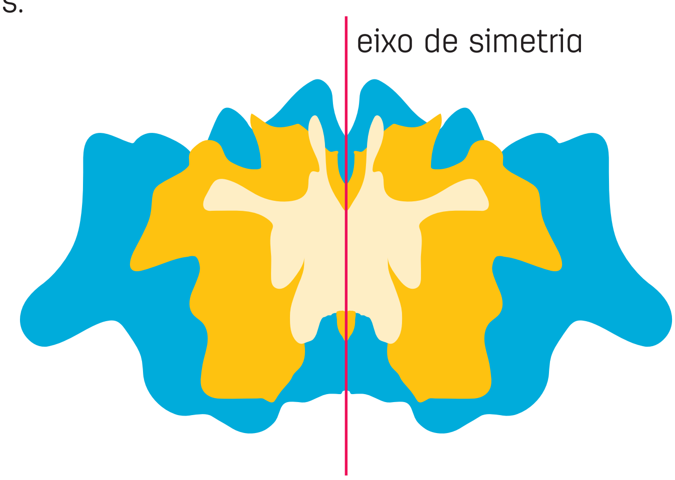
A simetria é definida como a reflexão de um ponto, recta, plano ou sólido relativamente a uma recta, onde ambas as partes devem coincidir quando os pontos de dobra coincidirem com a recta. Esta recta chama-se **eixo de simetria**.

Se olhares à tua volta, verificarás que a simetria está presente no meio a tua volta, como podes observar nas figuras abaixo.



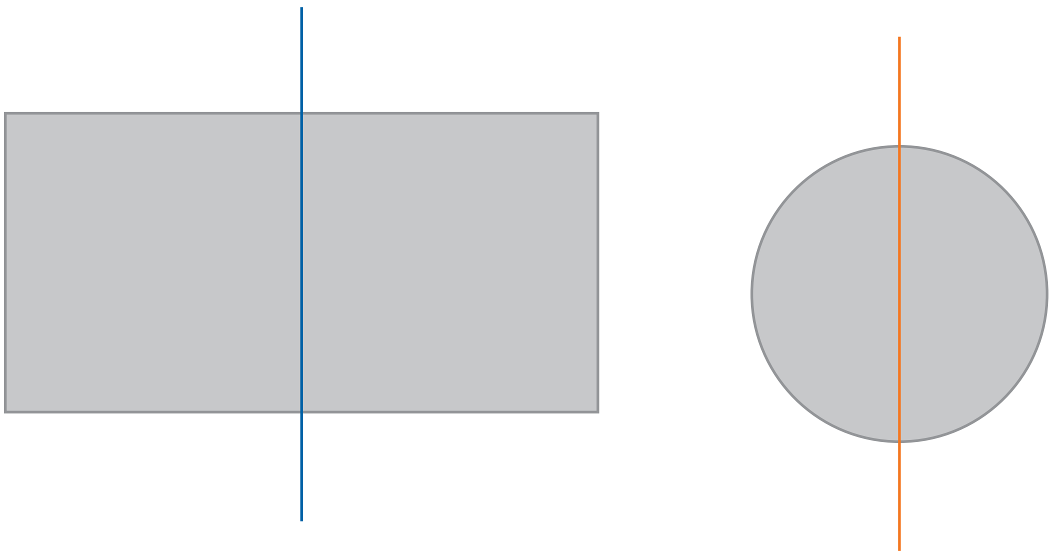
Simetria no plano

O eixo de simetria de uma figura é a linha que divide essa figura em duas partes simétricas. Faz a experiência seguinte: Deita uma porção de tinta numa folha de papel e dobra a folha de modo que a tinta se espalhe também do outro lado da dobra da folha. Podes usar tintas de várias cores.

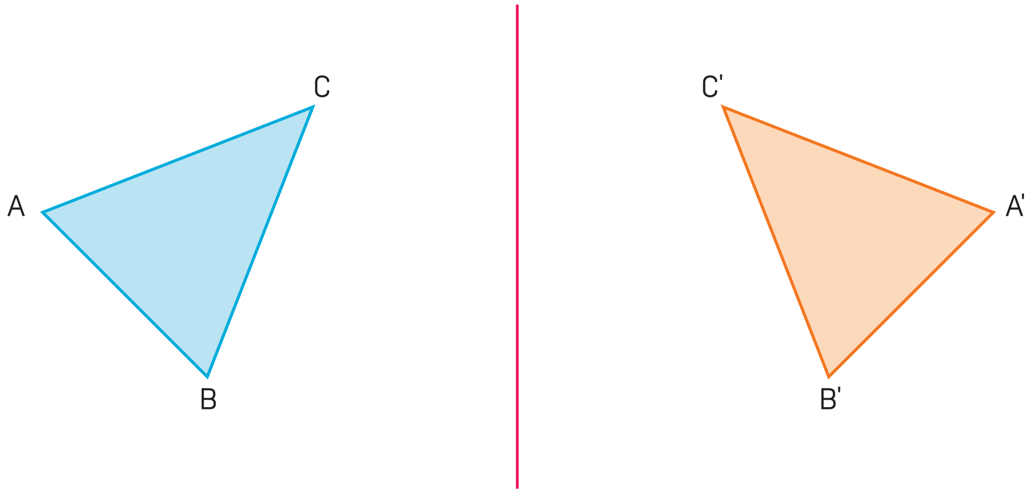


Observarás que a figura obtida tem duas partes simétricas, uma em cada um dos lados da dobra. Neste caso, o vinco da dobra da folha representa o **eixo de simetria**.

Também podemos encontrar simetria em muitas figuras geométricas planas já estudadas. Observa as imagens seguintes:

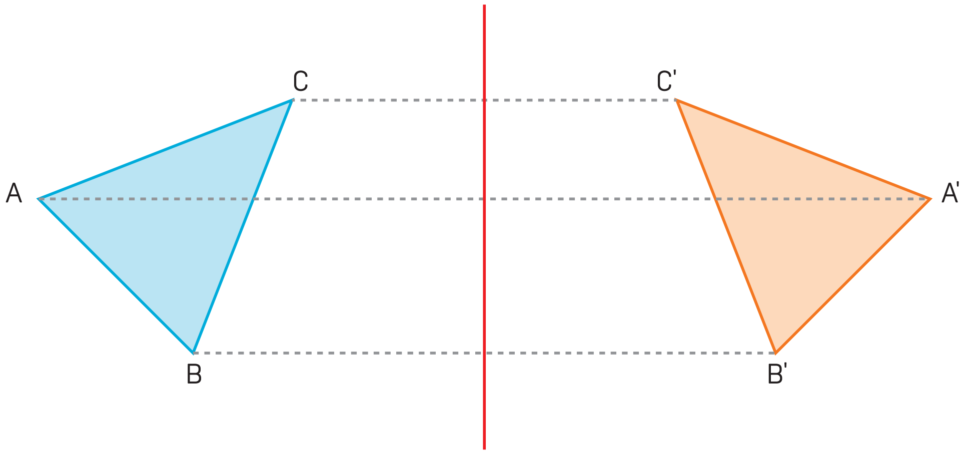


Agora analisa as figuras abaixo. Será que os triângulos são simétricos?



Observa, na página seguinte, as mesmas figuras, mas com o eixo de simetria e as linhas de correspondência dos pontos dos seus vértices.

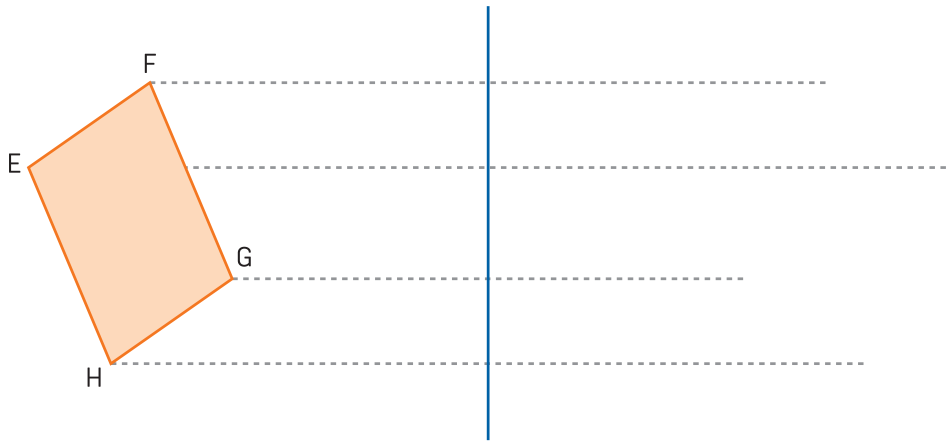
Como podes verificar, é fácil constatar que os triângulos [ABC] e [A´B´C´] são simétricos.



Observa que:

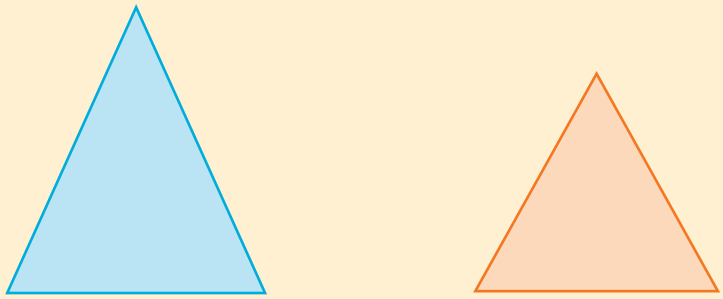
- Cada par de pontos correspondentes (A e A´; B e B´; C e C´) está à mesma distância em relação ao eixo de simetria.
- Os segmentos que saem de um ponto ao seu correspondente (de A para A´; de B para B´; de C para C´) são perpendiculares ao eixo de simetria.
- A distância de um ponto a uma recta é medida perpendicularmente à recta, ou seja, a distância de um ponto a uma recta é igual ao comprimento do segmento de recta perpendicular à recta e com os extremos no ponto e na recta.
- Se dobrássemos a folha a partir do eixo de simetria observaríamos que as figuras coincidem. O que implica dizer que uma é a "imagem da outra", separadas pelo eixo de simetria.

Dado o paralelogramo abaixo, analogamente, desenha o seu simétrico, tendo em conta as condições.

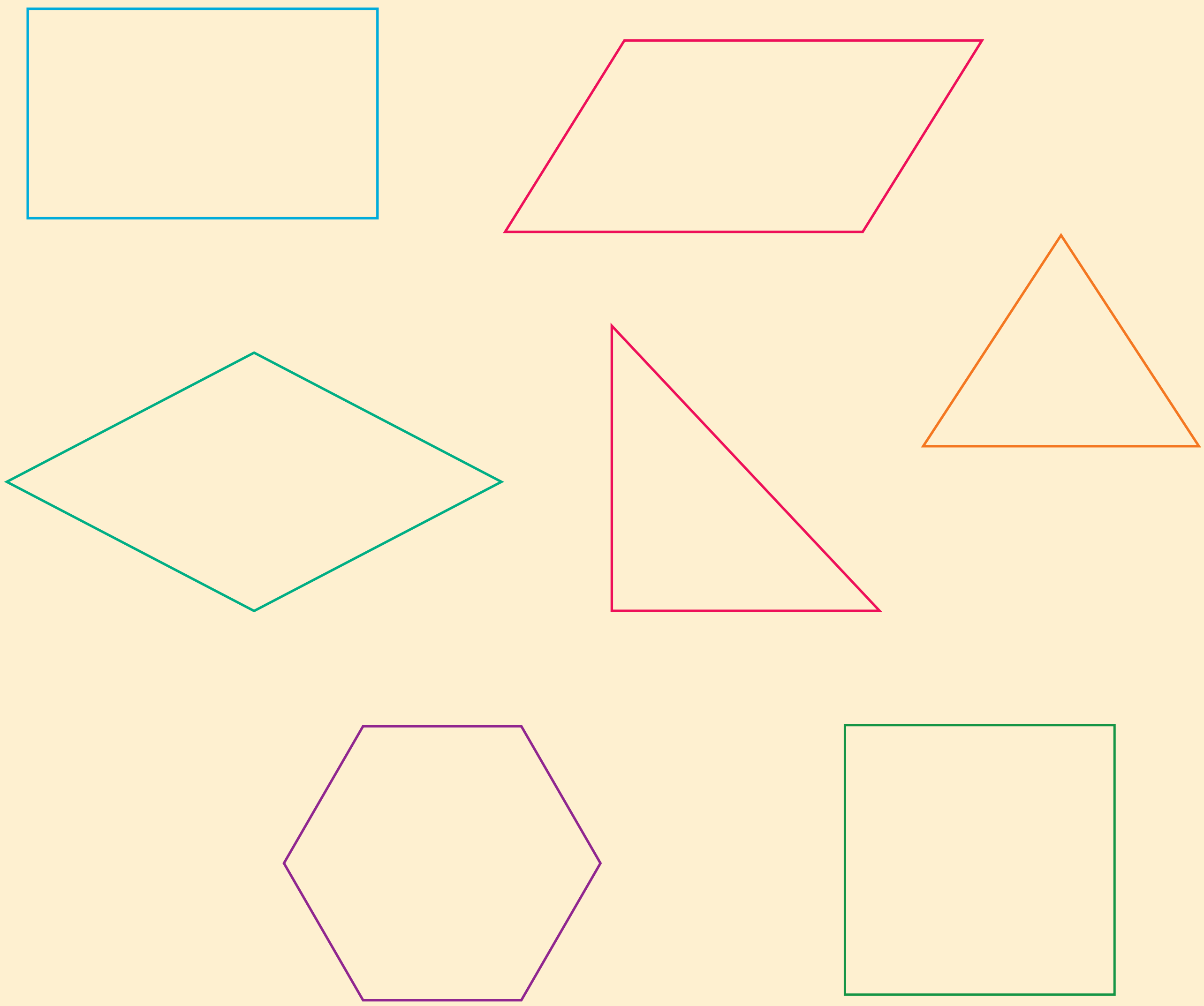


Exercícios

1. Traça o eixo de simetria destas duas figuras.



2. Traça agora o eixo de simetria das figuras seguintes. Será que tal é possível em todas as figuras?



4.4 Áreas e volumes

Áreas de paralelogramos, de triângulos e de círculos

Recorda-te de que são figuras equivalentes as que têm a mesma área, embora tenham formas diferentes.

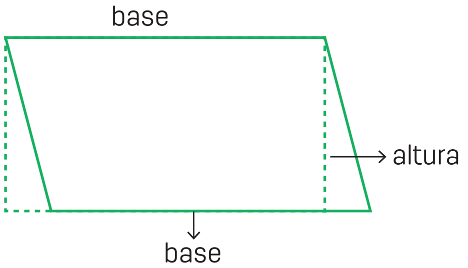
Área de paralelogramos

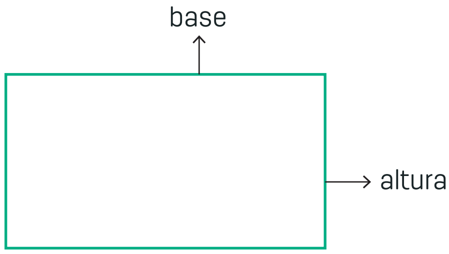
Vamos calcular a medida da área de um paralelogramo.

No paralelogramo abaixo, se copiarmos o triângulo à direita e o juntarmos à esquerda, obtemos o rectângulo à direita (rectângulo equivalente).

O rectângulo obtido e o paralelogramo têm a mesma medida de comprimento da base (b) e a mesma medida de comprimento da altura (a).

Nota: A altura é sempre medida perpendicularmente à base.



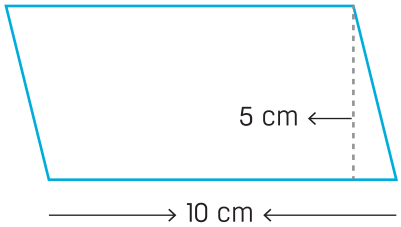


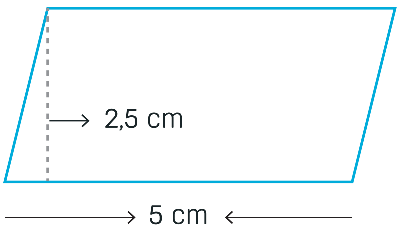
Como sabes, a medida da área do rectângulo é **A = b** × **a**. Portanto, a medida da área do paralelogramo será também **A = b** × **a**.

A **área** do paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Exercícios

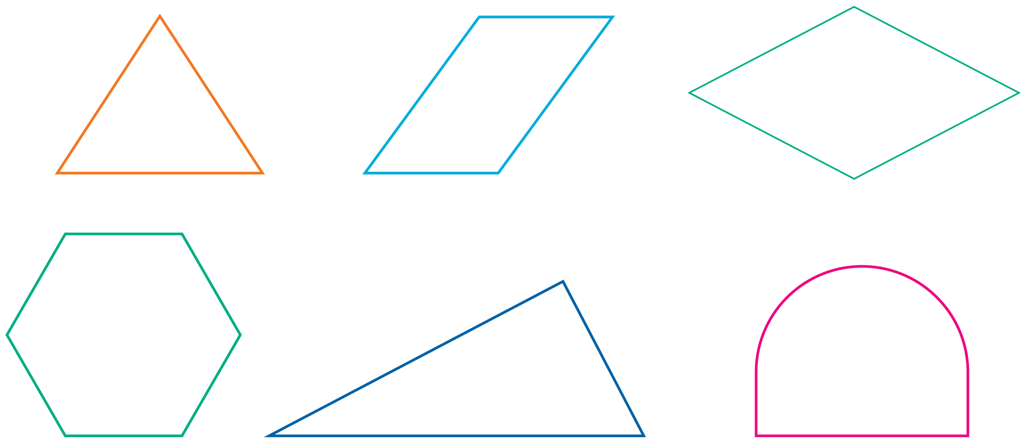
1. Calcula a área dos paralelogramos seguintes:





2. Se a área de um paralelogramo é igual a 17,68 cm^2 e se a medida da altura é 3,4 cm, determina a medida da base do paralelogramo.

3. Traça a altura das figuras apresentadas abaixo:

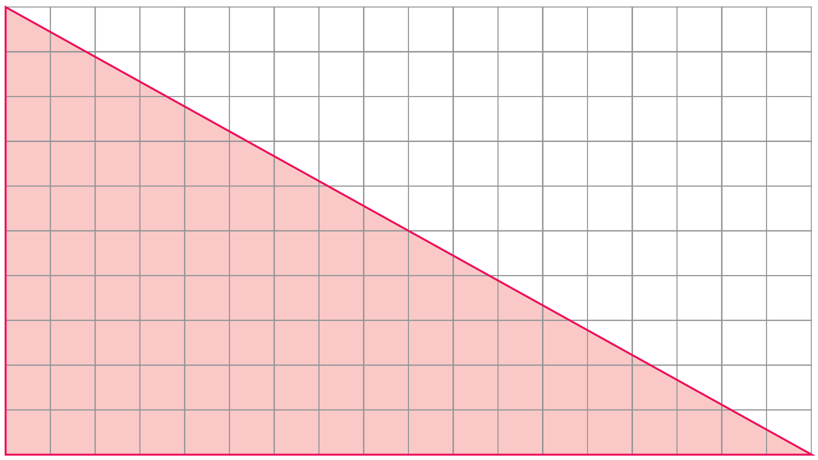


Área de triângulos

Vais aprender como se obtém a área de um triângulo.

Conta o número de todas as quadrículas do rectângulo que vês abaixo.

Quantas quadrículas tem o triângulo colorido?

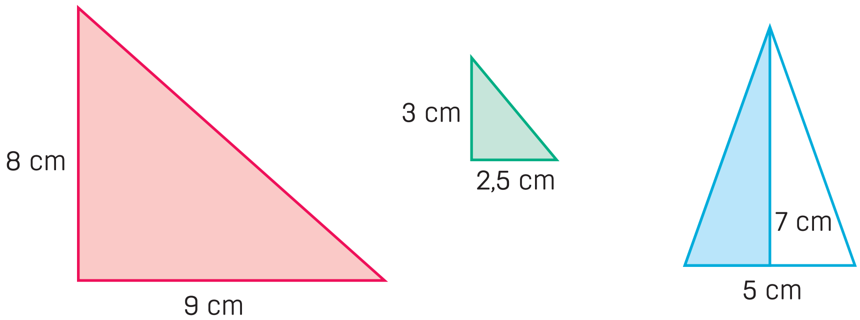


Observaste que há 180 quadrículas no rectângulo e 90 no triângulo. A área do rectângulo é igual a **b** × **a** (**b** é a base e **a** é a altura); logo, a área do triângulo é igual a:

$$A = \frac{a \times b}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b \times h}{2}$$

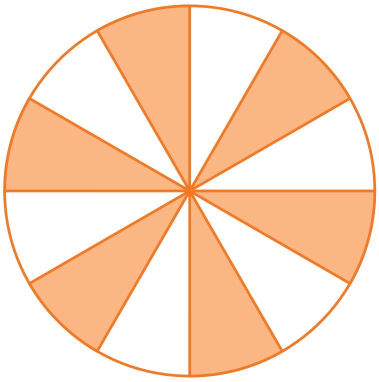
Exercícios

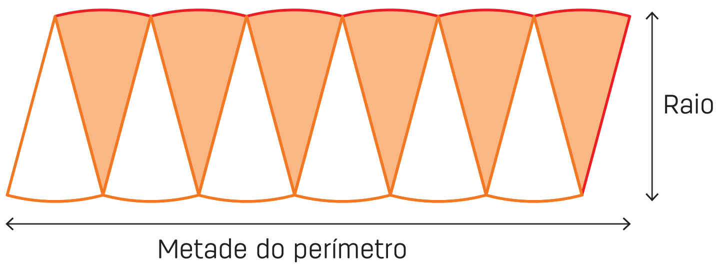
1. Calcula a área de cada uma das superfícies coloridas.



Área de círculos

Traça um círculo, numa cartolina e divide-o em 12 sectores idênticos. Recorta esses sectores e coloca-os, como se vê na figura à direita, de modo a obteres aproximadamente um paralelogramo.





Podes concluir que:

- O comprimento da figura é aproximadamente metade do perímetro do círculo.
- A sua altura é aproximadamente idêntica ao raio do círculo.
- A área da figura é aproximadamente idêntica à área do círculo.

A área do círculo = metade do perímetro × raio

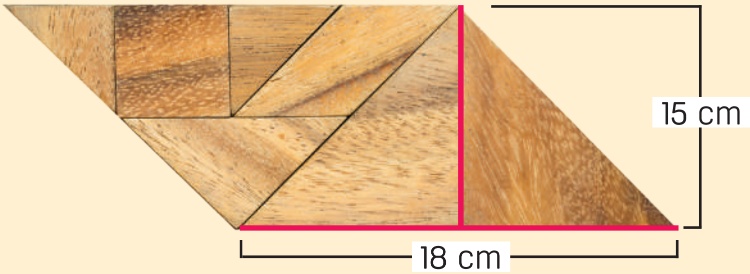
$$\text{Área do círculo} = \frac{P}{2} \times r$$
$$= \frac{2 \times \Pi \times r}{2} \times r$$
$$= \Pi \times r \times r$$
$$= \Pi \times r^2$$

$$A_{\bigcirc} = \Pi \times r^2$$

Exercícios

1 Calcula a medida da área de um paralelogramo cuja base mede 8 cm e a altura mede 3 cm.

2 O Júlio obteve a forma de um paralelogramo representado abaixo, ao jogar com as peças de um jogo. Calcula a medida da área.



3 Calcula a área de um círculo cujo diâmetro mede 3 cm.

4. Completa a tabela seguinte com as medidas em falta.

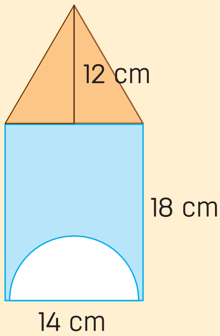
Raio em cm	Diâmetro em cm	Área em cm²	Perímetro em cm
5			
	13		
14			
	124		

5. De uma tábua de madeira com 32 cm de largura e 2 m de comprimento foram recortados discos com 16 cm de raio.

a) Qual é o número máximo de discos que foram recortados?

b) Qual é a área da tábua de madeira que foi desperdiçada?

6. Observa a figura abaixo, que representa uma peça de um jogo. Determina a área da superfície colorida.

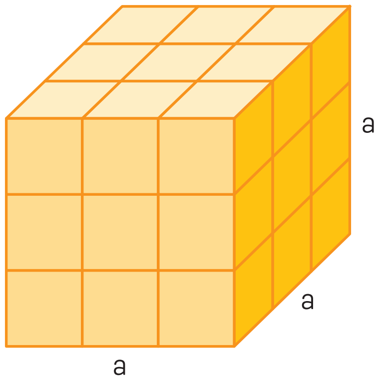


Volumes de prismas e de cilindros

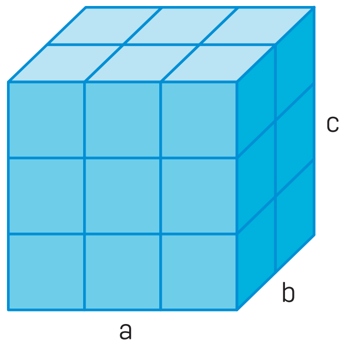
Volume de prismas quadrangulares

Sabes que um paralelepípedo rectângulo é um paralelepípedo rectangular.

Já aprendeste a calcular o volume de um **paralelepípedo** e de um **cubo**. Podes aplicar a mesma fórmula para calcular o volume do prisma recto cuja base é um paralelogramo.



$$V = \underbrace{a \times a}_{\text{área da base}} \times \underbrace{a}_{\text{altura}}$$



$$V = \underbrace{a \times b}_{\text{área da base}} \times \underbrace{c}_{\text{altura}}$$

O volume do prisma, cuja base é um paralelogramo, calcula-se multiplicando as medidas de comprimento da altura, da largura e do comprimento.

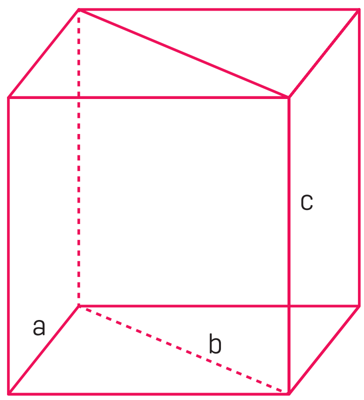
Volume de prismas triangulares

A figura mostra um paralelepípedo rectangular, um prisma quadrangular, decomposto em dois prismas triangulares iguais.

Ora, se o **volume do paralelepípedo** é $V = a \times b \times c$,

O volume de cada prisma triangular será a metade de $a \times b \times c$, ou seja, $V = \dfrac{a \times b \times c}{2}$ e, como $\dfrac{a \times b}{2}$ é a medida de área da base do prisma triangular (triângulo), podemos escrever:

Volume do prisma triangular: $V = A_b \times c$



Em regra geral, o volume de um prisma resulta da multiplicação da medida de área da base pela medida de comprimento da altura.

Volume do prisma: $V = A_b \times a$

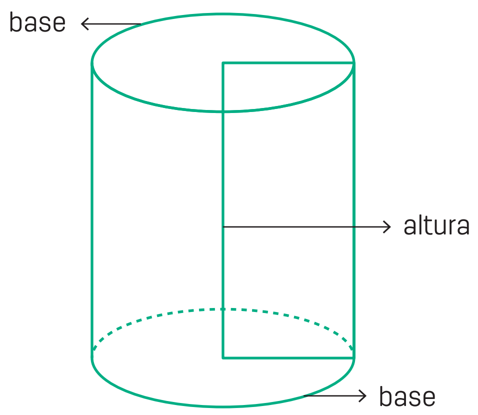
Exercícios

1. Calcula o volume de um prisma cujas bases são triângulos rectângulos e cujos catetos medem, respectivamente, 4,2 cm e 3,8 cm. A altura do prisma é de 5 cm.
2. Calcula o volume de um prisma quadrangular cuja área da base mede 25 cm^2 e a sua altura 8 cm.

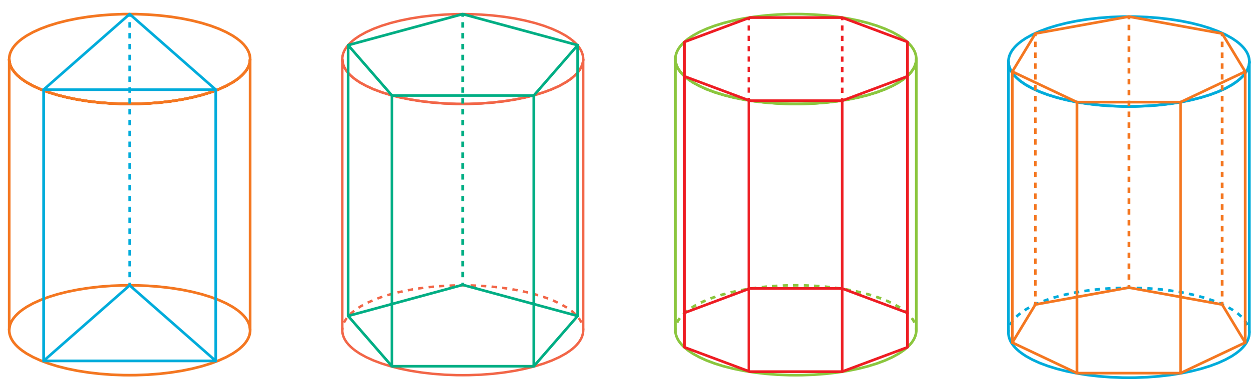
Volume de cilindros

O cilindro é limitado por:

- duas faces planas, que são círculos e que representam as bases do cilindro;
- uma superfície curva, à qual se chama superfície lateral.



Vamos agora inscrever prismas nos seguintes cilindros.



Observaste que, à medida que o número de lados do polígono da base aumenta, o prisma inscrito se aproxima cada vez mais do cilindro.

Para calcular o volume de um cilindro, aplica-se a fórmula do cálculo da medida do volume do prisma. Como as bases de um cilindro são círculos, o cálculo da medida do volume de um cilindro é dado por $V = \Pi \times r^2 \times$ altura.

Assim, a medida do volume de um cilindro é igual ao produto da medida da área da base pela medida da altura.

$$V = \Pi \times r \times h$$

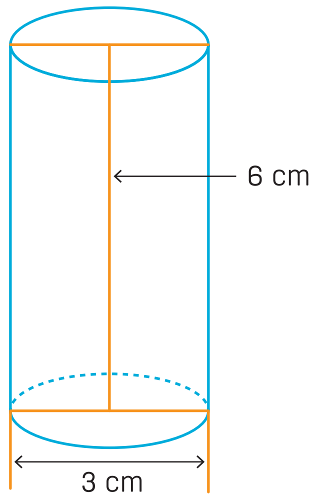
Exemplo:

Calcula o volume do cilindro representado na figura ao lado.

$A_b = \Pi \times r^2 = [3{,}14 \text{ x } (1{,}5)2]\ cm^2$

$= 7{,}065$ cm2

$V_c = 7{,}065 \times 6 = 42{,}39\ cm^3$



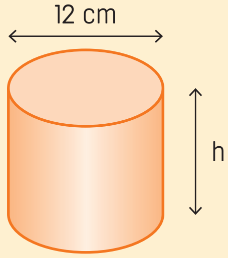
Exercícios

1. Calcula o volume de um cilindro que tem 10 cm de diâmetro e 10 cm de altura.

2. Completa a tabela com os dados em falta.

Diâmetro	Raio	Área	Altura	Volume
13 cm			3,5 cm	
	6 cm		4 cm	
		$7{,}85\ cm^2$		$8{,}635\ cm^3$
			2,1 cm	$424{,}116\ cm^3$

3. Observa a figura que representa um cilindro:



Calcula a medida da altura do cilindro, sabendo que o seu volume é $734{,}76\ cm^3$.